Die Bedeutung der Mathematik für die logischen Untersuchungen Bernard Bolzanos.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

genehmigt

von der philosophischen Fakultät

der

Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität zu Bonn.

Von

Simon Theobald

aus Niederberg.

Druck: G. Peine Wwe. Koblenz
1928

Berichterstatter:
Geh. Reg.-Rat Professor Dr. Dyroff.

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Inhalt.

Seite

Einleitung 5

I. Abschnitt: **Grundlegung der Logik.**

1. Logik und Methode 8
2. Das Forschungsgebiet der Logik 14
3. Die Menge der Wahrheiten an sich und ihre Erkennbarkeit 26

II. Abschnitt: **Die Lehre von den Vorstellungen an sich.**

1. Der Begriff der Vorstellung an sich 32
2. Teile und Inhalt einer Vorstellung an sich . . 35
3. Gegenstand und Umfang einer Vorstellung . 41
4. Vorstellungen von Inbegriffen 49
5. Verhältnisse zwischen Vorstellungen an sich . 57
6. Die Variation der Vorstellungen 67

III. Abschnitt: **Die Lehre von den Sätzen und Wahrheiten an sich.**

1. Die einheitliche Grundform aller Sätze an sich 71
2. Die Einteilung der Sätze an sich 74
3. Beziehungen zwischen Sätzen an sich . . . 83

IV. Abschnitt: **Die Lehre von den Schlüssen.**

1. Bolzanos Kritik an der herkömmlichen Schlußlehre 91
2. Verschiedene Schlußarten 96

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548917_0160

Einleitung.

Das philosophische System Bernard Bolzanos, das fast ein halbes Jahrhundert der Vergessenheit anheimgefallen war, hat erst in neuerer Zeit eingehende Beachtung und kritische Würdigung erfahren. Husserl, der den Bann des Psychologismus in der Logik gebrochen hat, rühmt in seinen „Logischen Untersuchungen" (I, S. 225)[1]) von Bolzano, er habe die Abgrenzung der reinen Logik in einer Reinheit und wissenschaftlichen Strenge dargestellt und mit einer solchen Fülle von fruchtbaren Gedanken ausgestattet, daß er um dessentwillen als „einer der größten Logiker aller Zeiten" gelten müsse. Die Mathematiker haben die Verdienste Bolzanos schon länger erkannt und gewürdigt. Sie verehren in ihm den Meister, der durch die strenge Fassung des Stetigkeitsbegriffes eine exakte Darstellungsweise der höheren Analysis ermöglichte. H. A. Schwartz hat im „Journal für Mathematik" (Bd. LXXIV, S. 221) die Bedeutung Bolzanos für die wissenschaftliche Begründung der Funktionentheorie besonders hervorgehoben.

Nicht von der Erfahrung aus gelangt Bolzano zur Philosophie wie die idealistischen Philosophen, vielmehr lernt er in der Mathematik diese Wissenschaft kennen und lieben. In seiner „Lebensbeschreibung" (Wien 1875, S. 18 f.) erzählt er, daß er sich lange vergebens bemüht habe, der Mathematik, die ihn doch später „am meisten fesselte", Interesse abzugewinnen, bis er einmal zufällig durch verschiedene Sternchen in einem mathematischen Lehrbuche veranlaßt worden sei, die betreffenden Stellen nachzulesen. „Kästner bewies dort nämlich, was man sonst insgemein, weil es doch jeder schon weiß, ganz übergeht; d. h. er suchte dem Leser den Grund, auf welchem eines seiner Urteile beruht, zum deutlichen Bewußtsein zu bringen: und das war" Bolzano „eben das Liebste" (ebd.). Er beschloß nun, Mathematik zu studieren, weil er in dieser Wissenschaft zu finden hoffte, was er schon lange vergebens gesucht. Sein besonderes Wohlgefallen an der Mathematik beruhte also eigentlich auf ihrem spekulativen Teile, er schätzte an ihr nur „dasjenige, was zugleich Philosophie ist".

[1]) Edmund Husserl, Logische Untersuchungen, I. Bd., Prolegomena zur reinen Logik, 2. Aufl. Halle 1913. — In der Folge abgekürzt: L. U. I.

Mit der Veröffentlichung einer kleinen mathematischen Abhandlung, den „Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie" (Prag 1804), hat Bolzano im Alter von 23 Jahren sein wissenschaftliches Forschen begonnen und mit den überaus scharfsinnigen „Paradoxa" [1]) kurz vor seinem Tode — am 18. Dezember 1848 — geschlossen. Dazwischen liegt eine lange Reihe von Veröffentlichungen vorwiegend mathematischen und philosophischen Inhaltes, vor allem das Erscheinen seines philosophischen Hauptwerkes, der „Wissenschaftslehre" (Sulzbach 1837) [2]). Husserl rühmt an diesem Werke, daß es in Sachen der logischen Elementarlehre alles weit zurücklasse, was die Weltliteratur an systematischen Entwürfen der Logik darbiete. „Auf Bolzanos Werk", sagt er, „muß sich die Logik als Wissenschaft aufbauen, aus ihm muß sie lernen, was ihr nottut: mathematische Schärfe der Unterscheidungen, mathematische Exaktheit in den Theorien" (a. a. O., S. 226). Betrachten wir die Schriften Bolzanos genauer, so sehen wir, daß seine philosophischen Forschungen in engem Zusammenhange standen mit seinen mathematischen Studien. Die Beschäftigung mit der Mathematik führt ihn in das philosophische Denken und Forschen ein. Für ihn ist mathematisches Verständnis die Vorbedingung jeglichen Philosophierens. In seinem „Versuch einer objektiven Begründung der Lehre von den drei Dimensionen des Raumes" [3]) klagt er, nicht groß sei die Zahl der Philosophen seiner Zeit, deren mathematisches Wissen viel über den Satz, daß A gleich A ist, hinausreiche; und doch sei wahre Philosophie ohne mathematisches Verständnis undenkbar. So hoch hat er die Bedeutung mathematischer Denkweise für die Philosophie eingeschätzt, daß er geradezu einen Beweis gegen die Richtigkeit der Hegelschen Philosophie darin erblickt, daß dieser von sich sagt, es sei ihm trotz 25jähriger Anstrengung nicht gelungen, auch nur die einfachsten mathematischen Beweise aufzufassen; denn „die Abstraktionen der Philosophie sind in der Tat unendlich schwerer als jene der

[1]) Davon ist im Druck erschienen: Dr. Bernard Bolzanos Paradoxien des Unendlichen. Herausgeg. aus dem schriftlichen Nachlasse des Verfassers von Dr. Fr. Prihonsky, Leipzig 1850. Unveränderte Neuauflage (mit Anmerkungen von H. Hahn) herausgeg. durch A. Höfler; Verlag von Felix Meiner, Leipzig 1920.

[2]) Dieses Werk umfaßt 4 Bände. Es wird in der Folge abgekürzt: W. I, II, III, IV. Die W. lag bereits im Jahre 1822 druckfertig vor, wurde aber erst 15 Jahre später durch Freunde Bolzanos herausgegeben (Vorrede von Dr. Heinroth). Neu herausgegeben in originalgetreuem Neudruck von A. Höfler, Leipzig 1914.

[3]) Abhandlungen der Kgl. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften, 5. Folge III, Prag 1845, S. 203.

Mathematik, und wer schon hier . . . sich nicht zurechtfindet, der sollte es nicht wagen, in der Philosophie auch nur einen Mitsprecher machen zu wollen". [1])

Nach diesen Ausführungen bedarf die Frage nach der Bedeutung der Mathematik für die Philosophie Bolzanos keiner weiteren Rechtfertigung. Will man der Geistesarbeit eines Denkers, der in kühnem Fluge der Forschung neue Bahnen gewiesen hat, gerecht werden, dann darf man nicht nur das Ziel, das Resultat seiner Untersuchungen kritisch betrachten, dann muß man vor allem den Weg verfolgen, den er in seinem Forschen gegangen ist. Die vorliegende Arbeit hat sich diese Aufgabe gestellt, indem sie die Bedeutung der Mathematik für die logischen Untersuchungen Bolzanos, die den Hauptinhalt seiner Philosophie bilden, nachzuweisen sucht. Denn ohne Zweifel hat die Mathematik, das „Lieblingsstudium" Bolzanos, seine ganze Geistesrichtung beeinflußt.

---

[1]) Bolzano, über den Begriff des Schönen, Abhandl. der Kgl. Böhm. Ges. d. Wiss., 5. Folge III, Prag 1845, S. 26, Anm.

I. Abschnitt.

Grundlegung der Logik.

1. Logik und Methode.

Bei der Beurteilung der Frage nach dem Begriffe der Logik und ihrer Stellung in dem System der Wissenschaften richtet Bolzano sein Augenmerk auf die Gesamtheit aller Wahrheiten, die nur irgendein Mensch kennt oder einst gekannt hat. Wenn diese „Summe des ganzen menschlichen Wissens" auch nur ein Teil der unendlichen Menge aller Wahrheiten ist, die es „an sich" gibt, so übersteigt sie doch das begrenzte Erkenntnisvermögen des einzelnen Menschen. Selbst unter den günstigsten Bedingungen ist es nicht möglich, sich auch nur das wirklich Wissenswerte jenes Inbegriffes anzueignen. Wir müssen deshalb eine Teilung vornehmen, d. h. jeder muß sich aus dem Gebiete des Wissenswerten — der Eigentümlichkeit seiner Verhältnisse entsprechend — „das Nötigste oder das Nützlichste unter dem Nützlichen" auswählen. Um Auswahl und Erlernung zu erleichtern, ist es vorteilhaft, das gesamte Gebiet des menschlichen Wissens oder vielmehr die Menge der Wahrheiten überhaupt in einzelne Teile zu zerlegen und die „merkwürdigen" Wahrheiten eines jeden Teilgebietes in besonderen Lehrbüchern zusammenzustellen und zu beweisen. Auf diesem Wege kommt Bolzano zu dem Begriffe Wissenschaft, worunter er „jeden Inbegriff von Wahrheiten einer gewissen Art" versteht, „der so beschaffen ist, daß es der uns bekannte und merkwürdige Teil derselben verdient, . . . in einem eigenen Buche vorgetragen zu werden" (W. I, S. 4). So besteht z. B. die Raumwissenschaft (Geometrie) aus dem „Inbegriffe aller Wahrheiten, welche Beschaffenheiten des Raumes aussagen", und die geometrischen Sätze werden „in eigenen Büchern vorgetragen und mit Beweisen versehen, die ihnen möglichste Verständlichkeit und Überzeugungskraft gewähren" (ebd.).

Bolzano gesteht selbst, daß seine Definition der Begriffe Wissenschaft und Lehrbuch nicht die allgemein übliche ist.

Aber dieseErklärung verrät schon gleich zu Anfang die mathematische Einstellung des Logikers. Nach seiner Ansicht ist die Mathematik das Ideal aller Wissenschaften, und die Methode ihrer Lehrbücher ist ihm Vorbild.[1]) Diese Auffassung spricht er in seinen „Beiträgen zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik" (Prag 1810)[2]) auch offen aus: Jeder unbefangene Beurteiler müsse gestehen, daß die Mathematik unter allen Wissenschaften dem Ideale der Vollkommenheit noch am nächsten stehe. „In dem gemeinsten Lehrbuche der Mathematik", sagt er, „herrscht wirklich mehr Bestimmtheit und Klarheit der Begriffe, mehr Sicherheit und Überzeugung in den Urteilen, als noch zur Stunde in dem vollendetsten Lehrbuche der Metaphysik angetroffen wird" (S. III). Aus diesen Äußerungen des damals noch jungen Gelehrten geht klar hervor, daß er sich an der Mathematik orientiert. Er gewinnt die Einzelwissenschaften durch Zerlegen des gesamten Gebietes aller Wahrheiten, die es überhaupt gibt. Dabei übersieht er aber eine unüberwindliche Schwierigkeit. Wie sollte es möglich sein, aus einer Menge unendlich vieler Elemente, von denen nur endlich viele bekannt sind, eine Auswahl zu treffen! Eine Zergliederung in einzelne Teilgebiete kann jedenfalls nur das Gebiet der e r k a n n t e n Wahrheiten erfassen, nicht aber das Gesamtgebiet der Wahrheiten überhaupt[3]). Das Zerlegen spielt in der Philosophie Bolzanos eine wichtige Rolle; es kennzeichnet die mathematische Arbeitsweise. Hier ist das Verfehlte rein mathematischer Ableitung besonders deutlich. Unser Unvermögen, alles zu wissen, rührt von realen Faktoren her.

Das Streben Bolzanos nach systematischer Einheit der Einzelwissenschaften erfolgt in ökonomisch-praktischer Absicht; es gipfelt in der W i s s e n s c h a f t s l e h r e, dem „Inbegriff der Regeln, nach denen wir bei dem Geschäfte der Abteilung des gesamten Gebietes der Wahrheit in einzelne Wissenschaften und bei der Darstellung derselben in eigenen Lehrbüchern vorgehen müssen, wenn wir recht zweckmäßig vorgehen wollen" (W. I, S. 7). Da nun die Darstellung einer Wissenschaft in einem

---

[1]) Vgl. dazu die Auffassung Roger Bacons (Ed. Bridges I, S. 99—103): „Necesse est logicam a mathematicis dependere".

[2]) Neu herausgegeben von H. Fels mit dem Obertitel „Philosophie der Mathematik", Paderborn 1926. — In der Folge abgekürzt: „Beiträge". Die Seitenzahlen werden nach der Originalausgabe angegeben.

[3]) Vgl. Gerhard Gotthardt, Bolzanos Lehre vom Satz an sich, Berlin 1909, S. 2.

Lehrbuche die richtige Zerlegung des gesamten Wahrheitsgebietes, bzw. die genaue Bestimmung der Grenzen dieser Wissenschaft schon voraussetzt, so kann die Wissenschaftslehre auch kurz erklärt werden als die Wissenschaft, „welche uns anweise, wie wir die Wissenschaften in zweckmäßigen Lehrbüchern darstellen sollen" (ebd.). Diese Definition ist als verfehlt zu bezeichnen. Ganz abgesehen davon, daß Bolzano hier irrtümlich die Logik auf die wissenschaftlichen Wahrheiten beschränkt und diese Beschränkung in die Definition der Logik als Wissenschaftslehre aufnimmt, erblickt er ihre Aufgabe lediglich darin, Regeln aufzustellen für die Abfassung von Lehrbüchern der einzelnen Wissenschaften. Damit würde die Logik in der Hauptsache zu einer „ars utens" im Dienste der Spezialwissenschaften herabgewürdigt werden [1]). Bolzano selbst behält übrigens im Verlaufe seiner Untersuchungen diese Definition nicht konsequent bei (vgl. W. I, S. 56 ff.).

Wenn die Ausführungen Bolzanos auch in manchen Stücken den Widerspruch herausfordern, so muß doch festgestellt werden, daß er die Bedeutung der Logik als Methodenlehre erkannt hat. Und so sehen wir, daß er in seiner Polemik gegen die herrschende Philosophie nicht so sehr die „Täuschungen und Lügenwolken der chamäleontisch sich wandelnden Philosophie" seiner Tage bekämpft, als vielmehr ihre falsche Methode (Lebensbeschreibung, S. XLIX). In einem seiner Manuskripte, die im Prager Museum aufbewahrt werden, findet sich der Satz: „Für den Philosophen liegt der Anstoß in Hegels Abhandlungen nicht in den trostlosen Ergebnissen, sondern in der heillosen Methode". Überall legt Bolzano auf die Methode das Hauptgewicht, denn er ist überzeugt, daß dem Forscher die richtigen Ergebnisse nicht ausbleiben können, wenn er nur den richtigen Weg einschlägt [2]).

Die Idee einer Vervollkommnung und Neugestaltung der Wissenschaften führte schon Leibniz zu unermüdlichen Bemühungen um eine Reform der Logik; er erstrebte eine Verbindung von Mathematik und Logik, auf deren Grundlage Philosphie als Wissenschaft allein möglich sei. Diesem Denker, der sich die Entwicklung der Logik zu einer Disziplin von mathematischer Form

---

[1]) Vgl. Th. Ziehen, Lehrbuch der Logik auf positivistischer Grundlage mit Berücksichtigung der Geschichte der Logik, Bonn 1920, S. 9 f.

[2]) R. Zimmermann, über den wissenschaftlichen Charakter Bolzanos; Sitzungsbericht d. K. Akad. d. Wiss., Phil.-hist. Kl., Wien 1849, S. 169.

und Strenge, zu einer „mathesis universalis“ [1]), als Ziel gesetzt hat, steht Bolzano in der Geschichte der Philosophie am nächsten. Von ihm hat er ohne Zweifel manche Anregungen empfangen, mit ihm teilt er, wie wir noch sehen werden, wichtige Grundauffassungen und Gedanken. Aber in seiner Methode lehnt er sich nicht an Leibniz an. Die Methode eines Forschers ist ja die Seite seiner Untersuchungen, die am innigsten mit seiner Persönlichkeit verknüpft ist. „Großgesäugt durch mathematische Studien“, schreibt Bolzano in seiner Selbstbiographie, „zu wichtigen philosophischen Resultaten auf ganz verschiedenem Wege gekommen, erachte ich es für ersprießlich, die schon früher übliche mathematische Methode beizubehalten“ (a. a. O., S. XLI). Ähnliche Äußerungen finden sich in den „Beiträgen“. Von jeher habe man diese Methode ihrer hohen Vollkommenheit wegen gepriesen und bis auf Kants Zeiten auch geglaubt, daß sie sich im wesentlichen auf jeden wissenschaftlichen Gegenstand anwenden lasse [2]). An dieser Meinung hält Bolzano fest. Er ist der Ansicht, die sogen. methodus mathematica sei ihrem Wesen nach von jedem wissenschaftlichen Vortrage nicht im geringsten unterschieden. „Eine Abhandlung über die mathematische Methode“ ist also „im Grunde nichts anderes als — Logik“ (Beiträge, S. 30).

Als Zweck der mathematischen Methode will Bolzano keineswegs die bloße Vermehrung der Gewißheit gelten lassen. Nicht „Gewißmachung, sondern objektive Begründung“ ist ihm Ziel der Wissenschaft. Er beruft sich dabei auf Euklid und andere große Mathematiker, die zu manchem Satz, der an sich schon volle Gewißheit gewährt, doch noch einen eigenen Beweis liefern. Der nächste und unmittelbarste Zweck, den diese Denker in ihren wissenschaftlichen Untersuchungen verfolgen, sei vielmehr nur die Aufsuchung der letzten Gründe ihrer Urteile (Beiträge, S. 32). Nun kann man verstehen, daß ein Forscher wie Bolzano in dem Zeitalter Schellings und Hegels mit seiner mathematischen Art des

[1]) Leibniz, Nouveaus Essais, L. IV, Ch. XVII (Opp. phil. Erdm., § 4).

[2]) Kant hat sich schon in seinen vorkritischen Schriften wiederholt gegen die Übertragung der mathematischen Methode auf die Philosophie ausgesprochen. Z. B.: „Man kann mit dem Bischof Warburton sagen, daß nichts der Philosophie schädlicher gewesen sei als die Mathematik, nämlich die Nachahmung derselben in der Methode zu denken; denn was die Anwendung derselben in den Teilen der Weltweisheit anlangt, wo die Kenntnis der Größen vorkommt, so ist dieses ganz etwas anderes, nnd die Nutzbarkeit davon ist unermeßlich“ (Deutlichk. d. Grunds. d. nat. Theol. u. Moral, 1763, 2. Betracht.). Vgl. dazu auch Husserl, Ideen zu einer reinen Phänomenologie; Jahrb. für Philos. und phänomenol. Forschung, Halle 1913, S. 6.

Philosophierens ein Fremdling blieb. Gerade aus dem Grunde glaubte man, die Untersuchungen Bolzanos verwerfen zu müssen, „weil er erkläre und beweise, was von selbst klarer und gewisser sei, als es durch seine Erklärungen und Beweise nur immer werden könne“ [1]). Kein Wunder, daß man seine Methode für „langweilig, pedantisch und veraltet“ erklärte.

Welches ist nun das Charakteristische der Methode Bolzanos? Da muß zunächst sein Streben nach Klarheit und Deutlichkeit in der Begriffsbildung hervorgehoben werden, das in allen seinen Werken zu erkennen ist. Keiner seiner Zeitgenossen hält in dieser Beziehung einen Vergleich mit ihm aus. Die idealistischen Philosophen waren wohl Ästheten, Künstler und Historiker, aber keine Philosophen, denen Klarheit und Deutlichkeit der Begriffe oberstes Gesetz war; ihre Methode ist durchaus antimathematischer Art. Bolzano macht auch kein Hehl aus seiner entschiedenen Mißachtung der mächtigen philosophischen Modeströmungen seiner Zeit. Manches scharfe Wort läßt er fallen „über die neueste Art des Philosophierens in Deutschland“, die „eine auffallende Vorliebe für die Bildersprache“ an den Tag lege. Jene Bildersprache, meint er, sei das beste Mittel, entfernte Ähnlichkeiten als Gleichheiten hinzustellen oder sich in Paradoxien zu ergehen und dadurch den Schein einer Neuartigkeit des Gedankenganges zu erzeugen [2]). Wie ganz anders ist dagegen sein Vortrag! In seiner Selbstbiographie (S. XLII) gesteht er, daß er sich stets bemüht habe, das Wesen der Dinge, den Grund der Erscheinungen ohne alle Umschweife, klar und deutlich darzulegen. „Undeutliche Begriffe“, pflegte er zu sagen, „sind der Quell, aus welchem aller Irrtum fließt; denn so verhärtet ist kein Mensch, daß er die Wahrheit nicht erkennen oder der erkannten widerstreben wollte, aber selten ist derjenige, der sie zu erkennen weiß“ (Zimmermann, a. a. O., S. 165). Ein neuer Terminus wird nur eingeführt, wenn eine unbedingte Notwendigkeit vorliegt. Dabei wird die Einführung stets an der bisherigen Bezeichnungsweise gemessen. Schließlich sei noch bemerkt, daß Bolzano sich die Scheidung von Äquivokationen [3]) zur besonderen

[1]) Dr. Bolzano und seine Gegner, ein Beitrag zur neuesten Literaturgeschichte, Sulzbach (Seidel) 1839, S. 8.

[2]) Bolzano, Lehrbuch der Religionswissenschaft I, Sulzbach 1839, S. 165.

[3]) Man vgl. z. B. die Erklärung der Vieldeutigkeiten von „Form“ und „Materie“ (W. I, S. 389) und der verschiedenen Bedeutungen von „wahr“ (W. I, S. 107.).

Aufgabe macht. In der Tat! Seine Gedankenbildungen sind von mathematischer Schlichtheit und Nüchternheit, aber auch von mathematischer Klarheit und Strenge (Husserl, L. U. I., S. 226). Deutlich unterscheidet er zwischen Grundsätzen und Lehrsätzen. Langsam schreitet er von einer Erkenntnis zur nächsten, wobei er zu jeder Behauptung einen wissenschaftlichen Beweis liefert (Lebensbeschreibung, S. XLII). An den Beweis aber stellt er hohe Anforderungen. Die Beweise müssen formgerecht sein; sie dürfen nicht dem natürlichen Sprechen und seiner Neigung zu Abschweifungen, Abwechslung usw. angepaßt werden. Der wissenschaftliche Beweis einer Wahrheit ist „die Darstellung der objektiven Abhängigkeit derselben von anderen Wahrheiten . . . , d. h. die Herleitung derselben aus solchen Wahrheiten, die nicht zufälligerweise, sondern an sich und notwendig als Grund von ihr, und sie dagegen als ihre Folge betrachtet werden" (Beiträge, S. 62 f.).

Damit kommen wir zu einem weiteren Grundzug der Bolzanoschen Methode, dem Streben nach objekiver Wahrheit. Bolzano lebte in einer Zeit, die in der Philosophie den Maßstab objektiver Werte aufgegeben hatte und die Wahrheit selbst als Produkt eines selbstherrlichen Denkens erklärte. Demgegenüber betrachtet er die Wahrheit „an sich", d. h. unabhängig vom erkennenden Individuum und von jedem psychischen Prozeß. Zwischen diesen Wahrheiten besteht „ein gewisser objektiver, von unserer zufälligen zubjektiven Anerkennung derselben unabhängiger Zusammenhang, zufolge dessen einige aus diesen Urteilen die Gründe anderer, und diese die Folgen jener sind" (Beiträge, S. 31). Diesen objektiven Zusammenhang der Urteile, dem Bolzano eine mathematische Konsequenz zuspricht, sucht er zu erforschen und so ein System anzubahnen, das nicht mehr ein Stückwerk partieller Erkenntnis, sondern der Abdruck der Wahrheit an sich sein sollte.

Aus dieser Auffassung heraus erklärt sich auch seine sorgfältige Zergliederung der Begriffe in ihre letzten Bestandteile. Seine Veranlagung zu analytischen Untersuchungen, welche die mathematische Analysis um einige wertvolle Ergebnisse bereicherte, läßt ihn auch seine philosophischen Lehren planmäßig durch Analyse der zugrunde liegenden Begriffe gewinnen, wodurch er eine klare und deutliche Definition zu gewinnen sucht. Sein Verfahren ist kurz folgendes: Er stellt zunächst fest, ob der vorgelegte Begriff einfach oder zusammengesetzt ist. Im zweiten Falle sucht er durch Vergleich mit verwandten Begriffen und durch Hervorhebung

der Unterschiede einige Bestimmungen des Begriffes zu gewinnen. Lassen sich diese Bestimmungen auch auf fremde Gegenstände anwenden, d. h. auf solche, die dem zu untersuchenden Begriffe nicht unterstehen, dann werden in derselben Weise weitere Bestimmungen ermittelt usw. Schließlich wird noch festgestellt, ob die gefundene Erklärung keine Bestimmungen mehrfach enthält. Diese Methode ist geradezu mustergültig in der Abhandlung „Über den Begriff des Schönen" durchgeführt.

In den „Beiträgen" hat Bolzano die Grundlage zu seinem philosophischen System gelegt. Wenn er auch später nur selten auf dieses Werkchen, von dem leider nur die erste Lieferung erschienen ist, zurückkommt, so hat er doch in seinem philosophischen Hauptwerke, der Wissenschaftslehre, die in den „Beiträgen" ausgesprochenen oder auch nur angedeuteten Gedanken unter Anwendung der mathematischen Methode weiter ausgeführt. Im Verlaufe unserer Untersuchungen werden wir die Eigenart der Bolzanoschen Methode noch näher kennenlernen.

Die Warnung der speziellen Methodenlehre, die Methode eines Forschungsgebietes auf ein anderes zu übertragen, bloß darum, weil sie sich auf dem einen Gebiete bewährt hat, ist ohne Zweifel berechtigt. Wir werden gewisse Fehler der Bolzanoschen Untersuchungen festzustellen haben, die nur durch seine vorwiegend mathematische Einstellung erklärlich sind. Und doch ist seine eigenartige Methode in mancher Hinsicht geeignet, die Wissenschaft zu fördern. Emil Utitz[1]) kennzeichnet die Bedeutung Bolzanos sehr treffend mit den Worten: „Das Verdienst Bolzanos ist es, in einer Zeit des allgemeinen Taumels und Rausches einer der Nüchternsten und Besonnensten gewesen zu sein. Sein ständiger Ruf nach Klarheit und Deutlichkeit ist auch unser Ruf. Denn nur durch Klarheit und Deutlichkeit erweist sich ein gesunder wissenschaftlicher Fortschritt möglich."

2. Das Forschungsgebiet der Logik.

Bolzano war so durchdrungen von dem exakten und erfinderischen Geiste der Mathematik, daß ihm die Auffassung der Logik

[1]) Bolzanos Ästhetik; Deutsche Arbeit VIII, Prag 1908/9, S. 94.

als sogen. formale Wissenschaft eine unerträgliche Einschränkung zu sein schien. Den Ausspruch Kants, die Logik bedürfe keiner Fortschritte mehr, sie sei eine seit Aristoteles' Zeiten bereits vollendete und geschlossene Wissenschaft, weist er mit scharfen Worten zurück. Statt dieser „der menschlichen Trägheit so willkommenen Behauptung" sollte man vielmehr den Glauben an die Möglichkeit einer Vervollkommnung aller Wissenschaften und insbesondere der Logik als ein praktisches Postulat für die Menschheit aufstellen (W. I, S. 40, 2. Anm.). Die Geschichte der Wissenschaften biete zahlreiche Beispiele dafür, daß das Forschungsgebiet einer Wissenschaft im Laufe ihrer Bearbeitung erweitert worden sei. So habe sich z. B. die Geometrie, die ursprünglich nur eine Vermessungskunde war, zu der „Lehre vom Raume überhaupt" entwickelt. Sollte nicht auch das Objekt der Logik ein allgemeineres sein, als man bisher angenommen habe? Tatsächlich erblicken wir in der Erweiterung des Forschungsgebietes der Logik auf ideelle Objekte das eigentlich Neue der logischen Untersuchungen Bolzanos. Die Auffassung der Logik als praktische Wissenschaftslehre war zwar das eigentliche Ziel seiner Arbeit, aber diese Idee reicht, wie er selbst ausführt, bis in die ältesten Zeiten der Geschichte der Logik zurück. Dagegen rechnet er es sich selbst als ein besonderes Verdienst an, daß er von „Vorstellungen, Sätzen und Wahrheiten an sich" spricht, „während in allen bisherigen Lehrbüchern . . . von allen diesen Gegenständen nur als von Erscheinungen in dem Gemüte eines denkenden Wesens, nur als von Denkweisen, gehandelt wird" (W. I, S. 61). So ist denn der leitende Gedanke für den ganzen Aufbau der Logik Bolzanos die Scheidung des Denkinhaltes eines Urteils von der Denktätigkeit des Urteilens. Sein Ziel ist die objektive Wahrheit selbst, deren Gültigkeit absolut unabhängig davon ist, ob sie in dem Bewußtsein irgendeines Individuums auftaucht oder nicht. Zu diesem Zwecke sucht er „einen Standpunkt außerhalb sich selbst und seines Denkens" [1]) zu gewinnen.

Bolzano geht bei seinen Überlegungen aus von dem Begriffe eines Satzes in der gewöhnlichen Bedeutung, und zwar von einem ausgesprochenen Satze. Hinsichtlich der allgemeinen Modalität ist ein solcher Satz entweder wahr oder falsch, bzw. richtig

[1]) Melch. Palágyi, Der Streit der Psychologisten u. Formalisten, Leipzig 1902, S. 33.

oder unrichtig. Sätze brauchen aber nicht notwendig ausgesprochen zu werden, sie können auch bloß gedacht sein. Ob nun ein Satz ausgespochen oder nur gedacht wird, in jedem Falle läßt sich der Sinn, den er ausdrückt, von dem Satze selbst unterscheiden, und diesen Sinn bezeichnet Bolzano als „Satz an sich" (W. I, S. 121). Er versteht demnach unter einem Satze an sich „nur irgendeine Aussage, daß etwas ist oder nicht ist, gleichviel, ob diese Aussage wahr oder falsch ist, ob sie von irgend jemand in Worte gefaßt oder nicht gefaßt, ja auch im Geiste nur gedacht oder nicht gedacht worden ist" (W. I, S. 77). So ist z. B. der mathematische Satz: „Ein gleichseitiges Dreieck ist auch gleichwinklig" ein Satz an sich, falls ihn auch niemand liest und versteht.

Daß die Logik von „Sätzen an sich" handeln muß, folgt aus der Notwendigkeit, von „Wahrheiten an sich" zu sprechen und insbesondere von dem Zusammenhange, der zwischen ihnen besteht (W. I, S. 81.). Denn der Begriff der Wahrheit an sich ist dem des Satzes an sich untergeordnet. Bolzano bildet den Begriff der Wahrheit an sich in derselben Weise wie den eines Satzes an sich, indem er den Sinn von dem Akte einer wahren Aussage loslöst. Er versteht demnach „unter einer Wahrheit an sich jeden beliebigen Satz, der etwas so, wie es ist, aussagt", wobei er unbestimmt läßt, „ob dieser Satz von irgend jemand wirklich gedacht und ausgesprochen worden sei oder nicht" (W. I, S. 112). Ein Satz verdient also den Namen einer „Wahrheit an sich" oder einer „objektiven" Wahrheit, „wenn nur dem Gegenstande, von dem er handelt, das wirklich zukommt, was er ihm beilegt" (ebd.). Zur Erläuterung führt Bolzano an: Die Menge der Blüten, die ein gewisser Baum im verflossenen Frühling getragen, ist offenbar eine ganz bestimmte Zahl, auch wenn sie niemand kennt, und ein Satz, der diese Zahl richtig angibt, ist eine objektive Wahrheit, abgesehen davon, ob irgend jemand diese Wahrheit erkennt oder nicht erkennt.

Bolzano hat sich bei der Aufstellung der Grundbegriffe „Satz an sich" und „Wahrheit an sich" von mathematischen Analogien leiten lassen. Wir stützen diese Behauptung zunächst auf den Ausspruch Bolzanos, es müsse „auch dem Logiker freistehen, von Wahrheiten an sich zu sprechen, ganz mit demselben Rechte, mit dem . . . der Geometer von Räumen an sich (d. h. von bloßen Möglichkeiten gewisser Orte) spricht, ohne an eine Erfüllung der-

selben durch die Materie zu denken" (W. I, S. 114). Daraus geht klar hervor, daß unserem Logiker das ideale Forschungsgebiet der Mathematik, speziell der Geometrie vorgeschwebt hat.

Die ideellen Gebilde der Mathematik weisen auf gewisse psychische Tätigkeiten, z. B. Zählen, Verknüpfen, Beziehen usw., zurück, und reflektierend auf diese psychischen Akte mathematischen Operierens, ist es uns überhaupt erst möglich, die mathematischen Begriffe aufzuweisen. Dennoch ist die Mathematik kein Zweig der Psychologie. Niemand wird die mathematischen Gesetze als psychologische ansprechen. Selbstverständlich hat es die Psychologie als „die empirische Wissenschaft von den psychischen Tatsachen überhaupt" mit den mathematischen Denkvorgängen als zeitlich verlaufenden psychischen Akten zu tun. Aber das eigentliche Forschungsgebiet der Mathematik ist völlig frei von individuellen Tatsachen und zeitlicher Bestimmtheit. Die mathematischen Sätze sagen daher auch nichts aus von unseren bloßen Vorstellungen, die wir von den mathematischen Gebilden haben, sie handeln vielmehr von diesen selbst und ihren gegenseitigen Beziehungen „in abstrakter Reinheit und Idealität". Ebensowenig wie man die Mathematik als Sonderdisziplin der Psychologie erklären darf, ebensowenig gehört auch die Psychologie in die Mathematik. „Das Mathematische und das Psychologische sind so fremde Welten, daß schon der Gedanke ihrer Vermittlung absurd wäre; wenn irgendwo, so fände hier die Rede von einer *μετάβασις εἰς ἄλλο γένος* ihre Anwendung" (Husserl, L. U. I, S. 169).

Was wir hier bezüglich der Stellung der reinen Mathematik zur Psychologie ausgeführt haben, das nimmt Bolzano analog für die Logik in Anspruch. Auch die Logik muß bei ihrem wissenschaftlichen Forschen und Beweisen die Natur der psychischen Vorgänge, in denen es verläuft, berücksichtigen. Denn „die Logik soll uns lehren, auf welche Art wir unsere Erkenntnisse in ein echt wissenschaftliches Ganze vereinigen können; sie soll uns eben deshalb auch lehren, wie Wahrheit gefunden und Irrtum aufgedeckt werde usw. . Dies alles vermag sie nicht, ohne genaue Rücksicht zu nehmen auch auf die Art, wie gerade der menschliche Geist zu seinen Vorstellungen und Erkenntnissen gelange" (W. I, S. 55 f.). Aber diese Einschränkung besagt durchaus nicht, daß Bolzano die Logik als Teil der Psychologie auffaßt oder gar identisch mit ihr erklärt; er fordert vielmehr mit Herbart,

das Logische müsse von aller Einmischung des Psychologischen entfernt gehalten werden (W. I, S. 85). Die Logik als Lehre von den Sätzen und Wahrheiten an sich habe es weder auf psychische Tatsachen abgesehen noch auch auf Gesetze, die als psychologische zu charakterisieren seien. Daher büßen denn nach Ansicht Bolzanos die rein logischen Gesetze, z. B. die Syllogistik, ihren wesentlichen Sinn völlig ein, sobald man sie psychologisch zu interpretieren suche. Jeder Syllogismus, so argumentiert er, sei im Grunde nur ein Satz der Form „Aus den Wahrheiten A und B folget die Wahrheit C", worin die Vorstellungen der beiden Wahrheiten A und B lediglich als Glieder einer Summe, d. h. ohne jede Rangordnung erscheinen. Es bestehe kein Unterschied zwischen Schlüssen, in denen nur die beiden Vordersätze vertauscht seien, ein Beweis dafür, daß „die Sätze im Schlusse nicht als Gedanken, sondern als Sätze an sich" zu betrachten seien (W. I, S. 84). Bolzano löst also die Logik als Lehre von den Sätzen und Wahrheiten an sich, denen in keiner Weise der Charakter psychischer Vorgänge zukommen soll, von der Psychologie völlig los. Das Forschungsgebiet der Logik gehört analog dem der Mathematik in eine „Sphäre reiner Gesetzlichkeit" [1]).

Bolzano gelangt zu dem Begriffe „Satz an sich" durch ein Abstraktionsverfahren. In dieser Weise erfolgt auch die Begriffsbildung der ideellen Objekte der Mathematik. So verhält sich z. B. ein gezeichneter Kreis zu einem mathematischen Kreise wie ein gedachter Satz zu dem entsprechenden Satze an sich. Will man — ausgehend von einem gezeichneten Kreise — den mathematischen Kreis definieren, so muß man von allen sinnlichen Nebengedanken wie etwa des Gezeichnetseins von irgendeinem Individuum, des Erfülltseins durch die Materie usw. abstrahieren. Ganz analog gewinnt Bolzano seine logischen Grundbegriffe. So darf man auch bei dem Ausdrucke „Satz an sich" nicht mehr an „etwas Gesetztes" denken, „welches mithin das Dasein eines Wesens, durch welches es gesetzt worden ist, voraussetzen würde" (W. I, S. 77). Auch liegt das Gedachtwerden und das Fürwahrgehaltenwerden nicht im Begriffe des Satzes an sich: „Was durch die Worte: Ein gleichseitiges Dreieck ist auch gleichwinklig, ausgedrückt wird, falls sie auch niemand liest und

[1]) Vgl. dazu auch die Auffassung G. Freges in seinen „Grundgesetzen der Arithmetik", I. Bd., Jena 1893, S. XXII.

versteht, ist ein Satz an sich; was durch ihren Anblick in dem Gemüte unserer Leser erzeugt wird, ist ein gedachter Satz oder die subjektive Vorstellung von einem Satze" (W. I, S. 99). Bolzano selbst verteidigt das angewandte Abstraktionsverfahren mit dem Hinweis, daß man ja auch bei den „Kunstworten" anderer Wissenschaften, z. B. der Mathematik, von den sinnlichen Nebenbegriffen, die der ursprünglichen Bedeutung eines Wortes zuweilen noch anhaften, abstrahieren müsse (W. I, S. 78).

Wie wir ferner bei den mathematischen Gebilden im Gegensatze zu ihren sinnlichen Abbildern den Gedanken der Existenz in Abzug bringen müssen, so dürfen wir auch den Sätzen an sich kein Dasein beilegen. Die mathematischen Gebilde haben reales Dasein nicht als solche, sondern nur als konkrete Formen der individuellen Gegenstände, die den reinen mathematischen Gebilden nachgeformt sind. So existiert z. B. ein auf der Tafel gezeichneter Kreis nicht als mathematischer Kreis, sondern als sinnlich wahrnehmbares Abbild des mathematischen Begriffes. Analog sind auch die Sätze an sich „nichts solches, das an irgendeinem Orte oder zu irgendeiner Zeit, oder auf sonst eine Art als etwas Wirkliches bestände. Wohl haben erkannte oder auch nur gedachte Wahrheiten in dem Gemüte desjenigen Wesens, das sie erkennt oder denkt, ein wirkliches Dasein zu bestimmter Zeit, nämlich ein Dasein als gewisse Gedanken, welche in einem Zeitpunkte angefangen, in einem anderen aufgehört haben" (W. I, S. 112). In den „Paradoxien" (§ 13) werden die Sätze an sich dem „Reiche derjenigen Dinge, die keinen Anspruch auf Wirklichkeit, ja nur auf Möglichkeit machen" beigezählt, und dieses wird dem „Gebiete des Wirklichen" entgegengesetzt. Bolzano hat also für seine ideellen Objekte „Satz an sich" und „Wahrheit an sich" offenbar eine besondere Art des Seins, gleichsam ein drittes Sein, angenommen, das weder materiell noch psychisch ist. Ausdrücklich weist er (W. II, S. 10 f.) darauf hin, daß man das „Sein" vieldeutig gebraucht, je nachdem man von Dingen oder von Wahrheiten an sich spricht, und an einer andereren Stelle betont er, daß die Sätze an sich „zwar nicht als Existierendes, aber doch als ein gewisses Etwas" bestehen. Wir werden später auf diese Auffassung Bolzanos zurückkommen. Hier wollen wir uns darauf beschränken festzustellen, daß er das Sein des Nichtrealen als eine besondere Seinsweise auffaßt, die keine zeitliche

Determination gestattet, also zeitlos ist. Es wäre „ebenso ungereimt . . . zu sagen, ein Satz habe ewiges Dasein, als er sei in einem gewissen Augenblicke entstanden und habe in einem anderen wieder aufgehört" (W. I, S. 78). Das Prädikat „Ewigkeit" darf man den Wahrheiten an sich nur insofern beilegen, als man damit sagen will, „dies wären Sätze, die ein beständig (ewig) fortwährendes Verhältnis ausdrücken", wie man z. B. sagt, „es bleibe doch ewig wahr, . . . daß die gerade Linie die kürzeste zwischen zwei Punken ist u. dgl." (W. I, S. 113).

Bolzano schweben hier offenbar die mathematischen Wahrheiten vor. Diese sind in der Tat zeitlich nicht beschränkt, sie stehen überhaupt in keiner Beziehung zur Zeit. Legt man ihnen dennoch zuweilen das Attribut der Ewigkeit bei, so will man damit nur sagen, es sei widersinnig, das Wahrsein dieser Sätze als solches zeitlich zu bestimmen. Diese Ewigkeit ist also nicht eine Ewigkeit des Seins, sondern der Geltung[1]). Der feinsinnige David Hume drückt diesen Gedanken mit den Worten aus: „Wenn es auch niemals in der Natur einen Kreis oder ein Dreieck gegeben hätte, so würden doch die von Euklid dargelegten Wahrheiten für immer ihre Gewißheit und Beweiskraft behalten" (Enquiry etc., IV. Abschn., I. Teil). Bolzano würde sagen: Die Euklidschen Wahrheiten sind Wahrheiten an sich, sie bestehen ganz unabhängig davon, ob wir sie erkennen oder nicht erkennen. — Und mit Wahrheiten dieser Art hat es die Logik nach seiner Ansicht zu tun.

Das ganze Streben Bolzanos geht dahin, durch die Lehre von den Sätzen an sich unser Denken von dem Subjektivismus zu befreien (W. I, S. 60). Die Hauptmotive, die ihn zu der Annahme für sich bestehender Sätze und Wahrheiten führen, sind kurz folgende:

1. Die Logik muß gegenüber der Vielheit der psychischen Denkakte die Einheit der Bedeutung berücksichtigen.
2. Der Unterschied der wahren und falschen Urteile muß objektiv begründet sein.

Was das erste Problem betrifft, so liegen diese Verhältnisse in der Mathematik völlig klar; sie berücksichtigt gegenüber der Vielheit der psychischen Akte bloß die Bedeutung ihrer Gebilde und Sätze. In diesem Sinne spricht sie von dem recht-

[1]) Vgl. Libert, Das Problem der Geltung, Berlin 1914.

winkligen Dreieck und von dem pythagoräischen Lehrsatz. Der Mathematik ist also die psychologische Vervielfachung eines Gedankens gleichgültig. Aber auch die Logik muß auf die Frage, ob ein Gedanke sich vervielfacht, wenn er mehrmals gedacht wird, eine verneinende Antwort geben. Es gibt keine zwei völlig gleiche Vorstellungen, „weil ja dasjenige, was man hier für zwei Vorstellungen ansehen möchte, eigentlich nur eine und dieselbe Vorstellung zweimal gedacht" ist. Hier ist die „Vorstellung an sich" wohl zu unterscheiden von der subjektiven Vorstellung. „Wer aber die Vorstellung an sich von dem Gedanken an dieselbe unterscheidet, der muß auch den Satz an sich von seiner Erscheinung im Gemüte unterscheiden" (W. I, S. 84). Den Sätzen an sich kommt also Einheit der Bedeutung zu im Gegensatze zur Vielheit der denkenden Individuen und ihrer Denkerlebnisse.

Auch die Beantwortung des zweiten Problems stützt sich auf eine mathematische Analogie. In den „Beiträgen" erklärt Bolzano die Mathematik als eine „Wissenschaft, die von den allgemeinen Gesetzen (Formen) handelt, nach denen sich die Dinge in ihrem Dasein richten müssen". Dabei versteht er unter Dingen „alles, was überhaupt ein Gegenstand unseres Vorstellungsvermögens werden kann" (S. 16f.). Wie nun die mathematischen Gebilde (z. B. ein Kreis) gleichsam richtunggebend für unser Nachbilden (das Zeichnen eines Kreises) sind, so sollen die Wahrheiten an sich maßgebend für unser Erkennen sein. Denn die Erkenntnis ist nichts anderes als ein „Urteil, das einen wahren Satz enthält oder der Wahrheit gemäß ... ist" (S. 163).

Die Bolzanoschen Grundbegriffe geben Veranlassung zu einem Rückblicke auf Leibniz, dem Bolzano in der Geschichte der Philosophie ohne Zweifel am nächsten steht. Leibniz wirft in dem „Dialogus de connexione inter res et verba et veritatis realitate" (Ed. Erdmann, S. 76 ff.) die Frage auf, wem das Prädikat Wahrheit zukomme. Er findet die Wahrheit in den „cogitationes possibiles", die unabhängig von jedem Gedachtwerden für sich bestehen und richtunggebend für die wahren Urteile sind.[1]) Auf diese Stelle, die Bolzano gekannt hat (W. I, S. 121 Anm.), berufen sich diejenigen, die den Einfluß Leibnizens auf Bolzano besonders

[1]) Daher verwirft Leibniz in den Nouv. Ess. L. IV, Ch. 5 die Lockesche Einteilung der Wahrheiten in gedachte und ausgesprochene (mental and verbal), weil sie das innere Wesen derselben gar nicht berühre, wobei er bemerkt, daß man mit demselben Rechte dann auch Pergament- und Papierwahrheiten unterscheiden könnte (W. I, S. 121 Anm.).

hervorheben wollen. Es besteht auch kein Zweifel, daß Bolzano von jenem Denker beeinflußt ist. Man würde aber entschieden zu weit gehen, wenn man aus den kurzen Bemerkungen Bolzanos über Leibniz einen Nachweis konstruieren wollte, daß die oben angeführten Überlegungen Leibnizens von bestimmendem Einfluß für die Aufstellung der Bolzanoschen Grundbegriffe gewesen seien. Nichts deutet darauf hin. Wenn dem so wäre, dann würde Bolzano, der in seinen „Beiträgen" von sich sagt, daß er „die Wahrheit mehr als das Vergnügen einer eingebildeten Erfindung liebte" (S. XI), die Ausführungen Leibnizens sicherlich als grundlegend für seine Auffassung bezeichnet haben, gesteht er doch auch an anderen Stellen ganz offen, wenn er eine wichtige Erkenntnis diesem oder jenem Denker verdankt. Den Leibnizschen Dialog erwähnt er dagegen nur beiläufig in einer Anmerkung, wobei er hervorhebt, diese interessanten Ausführungen zeigten „wenigstens, daß Leibniz nicht zu der Klasse derjenigen Weltweisen gehöre, welche die Wahrheiten nur als eine Art von Urteilen betrachtet wissen wollen" (W. I, S. 120 Anm.).

Nicht der Einfluß Leibnizens ist es in erster Linie, sondern die Mathematik, die Bolzano zur Aufstellung der Grundbegriffe führt. Gerade ein Vergleich der „Wahrheiten an sich" mit den „cogitationes possibiles" ist geeignet, die Bedeutung der Mathematik für die Auffassung Bolzanos klarzumachen.

Nach Leibniz sind die ewigen Wahrheiten von Gott gedachte Wahrheiten,[1]), während Bolzano ausdrücklich erklärt, das Gedachtwerden liege nicht im Begriffe der Sätze an sich. Gleichwohl könne aus einem anderen Grunde, nämlich „aus Gottes Allwissenheit folgen, daß sie, wenn sonst von niemand, wenigstens von Gott selbst erkannt werden müssen" (S. 113). Es verhalte sich mit dem Begriffe einer Wahrheit an sich in dieser Hinsicht wie etwa mit dem Begriffe einer (geraden) Linie, welche die kürzeste zwischen ihren Endpunkten ist. Dieser Begriff sei gewiß ein anderer als der Begriff einer Linie, deren jedes Stück dem andern ähnlich ist. Und doch habe eine Linie, welche die kürzeste zwischen ihren Endpunkten ist, zugleich die Eigenschaft, in allen ihren Teilen ähnlich zu sein und umgekehrt. Bloß darum also, so folgert Bolzano, weil zwei Begriffe Wechselbegriffe seien, dürfe

[1]) Leibniz geht so weit, daß er aus dem Dasein der ewigen Wahrheiten einen apriorischen Beweis für das Dasein eines sie denkenden Gottes konstruiert (Monadologie, Ed. Erdmann II, S. 708).

man ihre Verschiedenheit noch nicht bestreiten. „Obwohl alle Wahrheiten an sich zugleich auch erkannte (nämlich von Gott erkannte) Wahrheiten sind, so ist doch der Begriff einer Wahrheit an sich von dem einer erkannten Wahrheit . . . sehr wohl zu unterscheiden" (W. I, S. 114)[1]. Der Logiker darf also, so schließt Bolzano, von Wahrheiten an sich sprechen, denen „die Denkbarkeit als eine Beschaffenheit" zukommt, ohne daß sie „in ihrem Begriffe als ein Bestandteil" liegt. So spricht man ja auch in der Mathematik von „Räumen an sich" . . . , „ohne an eine Erfüllung derselben durch die Materie zu denken; obwohl sich vielleicht aus Gründen der Metaphysik beweisen ließe, daß es gar keinen leeren Raum gebe und geben könne" (ebd.).

Aus all dem geht klar hervor, daß Bolzano sich bei der Aufstellung seiner logischen Grundbegriffe von mathematischen Analogien hat leiten lassen. Es liegt sogar der Gedanke nahe, daß mathematische Probleme ihn zu seinem System geführt haben. Die Lehre Bolzanos ist charakterisiert durch die eigenartige Objektivierung der Wahrheit. Durch sein ganzes Werk zieht sich der Grundgedanke, daß die Wahrheit unabhängig sei von jedem Denken und Erkennen, und gerade dadurch unterscheidet sich sein System von der Lehre aller früheren Logiker. Was hat ihn zu dieser Auffassung veranlaßt? War es nicht seine große Vorliebe für mathematische Spekulationen, die sich besonders in dem idealen Forschungsgebiete der Geometrie auswirkten? Wenn wir bedenken, daß seine logischen Untersuchungen im innigen Zusammenhange standen mit seinen mathematischen Studien, dann liegt der Gedanke zum mindesten sehr nahe. Mit Mathematik hatte er sich beschäftigt, noch ehe er an die Ausführung seines philosophischen Werkes dachte. Als Mathematiker war er besonders vertraut mit objektiven Wahrheiten, es war ihm sogar gelungen, einige dieser Wahrheiten (mathematische Lehrsätze) aus dem Reiche der noch ungedachten und ungekannten Wahrheiten an sich aufzufinden und einen Beweis dafür zu erbringen.[1]) Sätze vorwiegend mathematischen Charakters sind es daher auch, die

[1]) Palágyi (a. a. O., S. 23) nennt diesen Beweis ein „Muster von scholastischer Spitzfindigkeit". Von niemandem gedachte Wahrheiten und von Gott gedachte Wahrheiten seien zwei einander ausschließende, gegensätzliche Begriffe und keine Wechselbegriffe. H. Bergmann (Das philosophische Werk Bernard Bolzanos, Halle 1909, S. 20 Anm.) wendet mit Recht ein, das wäre nur richtig, wenn Bolzano meinte, es liege im Begriffe der Wahrheiten an sich, daß sie nicht gedacht werden, während er aber nur sage, daß es nicht in ihrem Begriffe liege, gedacht zu werden.

er zur Erklärung seiner Sätze und Wahrheiten an sich immer wieder anführt. So können wir sagen, daß er durch die Beschäftigung mit der Mathematik besonders durchdrungen war von der Objektivität der Wahrheiten, die unabhängig sind von jedem Gedacht- und Erkanntwerden, die feststehen von Ewigkeit her und Geltung behalten für alle Zeiten. Daher empfiehlt er auch als Vorbereitung für seine Logik das Studium der mathematischen Wissenschaften, „die, ob sie gleich a priori sind, doch einen Gegenstand, der sinnlich darstellbar ist, behandeln" (W. I, S. 44). Deutlich zeigt er uns damit den Weg, den er selbst in seinem logischen Forschen gegangen ist.

Die einseitige Orientierung Bolzanos an der Mathematik macht aber auch gewisse Ungenauigkeiten und Fehler verständlich, die an der Erklärung der Sätze an sich festzustellen sind. In der vorliegenden Arbeit, die lediglich den Einfluß der Mathematik auf die logischen Untersuchungen Bolzanos nachzuweisen sucht, muß darauf verzichtet werden, dieses System erkenntniskritisch zu durchleuchten. Das würde über den Rahmen dieser Arbeit weit hinausführen; zudem weist die Literatur in dieser Hinsicht verschiedene Abhandlungen auf, so daß wir uns hier kurz fassen können.

Die beiden Hauptprobleme, die Bolzano mit der Lehre von den Sätzen und den Wahrheiten an sich beantworten will, sind durchaus nicht gleichartig, wie Bergmann (a. a. O., S. 8 f.) gezeigt hat. Das erste Problem läßt sich restlos erklären durch die Unterscheidung von zwei Seiten an jedem Urteilsakt, und zwar einer subjektiven Seite, die von Urteil zu Urteil wechselnd die Vielheit der psychischen Denkakte bedingt, und einer objektiven Seite, die uns gestattet, die psychologisch vielfachen Urteile wie eines zu behandeln, wenn sie hinsichtlich ihrer inhaltlichen Angaben übereinstimmen. Diese Unterscheidung läßt sich aber an jedem Urteile, dem wahren wie dem falschen, vornehmen; sie genügt daher nicht, die Frage nach der Richtigkeit der Urteile zu beantworten. Und hieraus — aus dem zweiten Problem — schöpft die Annahme für sich bestehender Wahrheiten allein ihre Berechtigung. Leibniz nimmt, wie wir oben gesehen haben, zur Erklärung dieses Problems für sich bestehende „cogitationes possibiles" an, die richtunggebend

[1]) Vgl. H. Bergmann, a. a. O., S. 208: „Die von Bolzano in der Mathematik gefundenen und bewiesenen Theoreme".

für unsere Urteile sein sollen, aber nur für die wahren Urteile. Das richtige Urteil hat demnach ein für sich bestehendes Korrelat, die Wahrheit an sich, während dem falschen Urteil kein solches Korrelat entspricht. „Der Unterschied richtiger und falscher Bewußtseinsakte läßt sich . . . nicht anders begreifen als dadurch, daß die richtigen Akte ein Korrelat haben, das existiert (ὑπάρχει!) und dem sie konform, ideell adäquat[1]) sind, während das Korrelat der falschen Akte nicht existiert und man von ihnen nur sagen kann, sie wären ihm konform, wenn es existierte" (Bergmann, a. a. O., S. 13). Die Lehre von den Wahrheiten an sich ist daher wohl geeignet, den Unterschied der wahren und falschen Urteile objektiv zu begründen, indem sie das richtige Urteil durch die Adäquation an die entsprechende Wahrheit an sich charakterisiert. Wenn aber Bolzano auch die Sätze an sich wieder in wahre und falsche einteilt[2]) und so zu jedem Urteile ein Korrelat annimmt, so verwickelt er sich damit in Widersprüche, die sein System — in dieser Fassung wenigstens — für die Erkenntnistheorie wertlos machen. Diese kurze Kritik, wie auch die früheren Bemerkungen gegen Bolzano zeigen, daß er in der Aufstellung seines Systems zu wenig erkenntniskritisch vorgegangen ist. Auch Husserl, der das Bolzanosche System weitergebildet hat, rügt die „empfindlichen Mängel" in erkenntnistheoretischer Hinsicht (L. U. I, S. 227). Wie ist das zu erklären bei einem Denker wie Bolzano, der die spekulative Seite der Philosophie doch so sehr schätzte? Auf Grund der vorangegangenen Untersuchungen — die folgenden werden das noch deutlicher zeigen — kann man wohl sagen, daß der Mangel an erkenntniskritischer Reflexion in der Hauptsache auf den überragenden Einfluß der Mathematik zurückzuführen ist. Bolzano hat sein System als Mathematiker aufgebaut, weniger als Philosoph. Wie der Mathematiker gleichsam als „ingeniöser Techniker" seine Theorien der Zahlen, Größen und Mannigfaltigkeiten aufbaut im bloßen Hinblick auf die formalen Zusammenhänge, ohne danach zu streben, letzte Einsicht in das Wesen seiner Theorien und der sie bedingenden Begriffe zu gewinnen, so hat auch Bolzano sein System aufgebaut, ohne sich sonderlich um die erkenntnistheoretische Grundlegung

---

[1]) Vgl. Marty, Untersuchungen zur Grundlegung der allgem. Grammatik und Sprachphilosophie I, S. 423 ff.

[2]) „Die Wahrheit an sich ist eine Beschaffenheit, die Sätzen zukommt, indem sich diese in wahre und falsche einteilen lassen" (W. I, S. 116).

zu kümmern. Daher auch die mannigfaltigsten Versuche[1]), die Bolzanoschen Grundbegriffe zu interpretieren und Antwort zu finden auf die grundlegenden Fragen seines Systems. die er unbeantwortet läßt.

3. Die Menge der Wahrheiten an sich und ihre Erkennbarkeit.

Wenn man bedenkt, daß über ein und denselben Gegenstand zuweilen ganz widersprechende Urteile gefällt werden, und daß es kaum eine Behauptung gibt, die nicht in irgendeiner Form bestritten wird, dann erhebt sich die Frage, ob es überhaupt objektive Wahrheiten gibt. Der radikale Skeptizismus, der in dumpfer Resignation jedes Suchen und Forschen für aussichtslos hält, verneint diese Frage. Bolzano erblickt daher eine grundlegende Aufgabe seiner Wissenschaftslehre darin, sich mit dem Skeptizismus auseinanderzusetzen. Wenn nämlich die Logik von den Wahrheiten an sich handeln soll, dann muß sie zunächst beweisen, daß es solche Wahrheiten überhaupt gibt; und wenn sie lehren will, wie Wahrheit gefunden und Irrtum aufgedeckt wird, dann muß sie vor allem die Frage beantworten. ob es uns Menschen überhaupt möglich ist, die Wahrheit zu erkennen.

Der Gedankengang dieser Untersuchungen, die Bolzano seiner Logik als grundlegend vorausschickt, ist kurz folgender. Er stellt sich einen Skeptiker vor, der nicht nur an der Existenz der ihn umgebenden Körperwelt zweifelt, sondern dem sein Zweifel selbst nur ein Schein ist. Diesen „vollendeten Zweifler" sucht er von der Unhaltbarkeit seiner Skepsis zu überzeugen, indem er einen mathematischen Beweis führt, daß es eine, ja unendlich viele Wahrheiten an sich gibt, und daß wir Menschen auch die Fähigkeit haben, objektive Wahrheiten mit völliger Gewißheit zu erkennen. Verschiedene Philosophen halten bekanntlich den extremen Skeptizismus wissenschaftlich für unwiderlegbar, so z. B.

[1]) Man vergleiche dazu die Stellungnahme Geysers zum logischen Tranzendentalismus (Grundlegung der Logik und Erkenntnistheorie, Münster 1919, S. 100 ff.) und die hervorragenden erkenntniskritischen Untersuchungen Bergmanns, a. a. O., der die verschiedensten Erklärungen der Bolzanoschen Grundbegriffe eingehend berücksichtigt und auf weitere Literatur hinweist.

Euler in seinen „Briefen an eine deutsche Prinzessin“ (Br. 97), Krug in seiner Logik (§ 13 Anm.) und Klein in seiner „Denklehre“ (§ 235). Bolzano aber vertraut so sehr auf die Überzeugungskraft der mathematischen Beweise, daß es ihm nicht unmöglich erscheint, den Skeptiker auf diesem Wege von der Unhaltbarkeit seines Systems zu überzeugen.

Der Lösung des Wahrheitsproblems scheint nun gleich zu Anfang eine Schwierigkeit dadurch zu erwachsen, daß der radikale Zweifler als solcher von irgendeiner Wahrheit nicht überzeugt werden kann durch einen Beweis, in dem sein Dasein oder das Dasein anderer schon vorausgesetzt wird. Aber diese Schwierigkeit schwindet, wenn man bedenkt, daß es „etwas anderes ist, nach einer gewissen Voraussetzung beim Vortrage eines Beweises handeln, und etwas anderes, diese Voraussetzung als einen Vordersatz in dem Beweise selbst gebrauchen“ (W. I, S. 74). Auch der Mathematiker, so argumentiert Bolzano, der sich bei seiner Beweisführung gewisser Zeichnungen und Werkzeuge bedient, handelt nach gewissen Voraussetzungen, die der Mechanik, Optik und anderen Wissenschaften angehören. Ist aber deshalb der mathematische Beweis weniger überzeugend? Durchaus nicht! Ebensowenig kann man sagen, „ein Zweifler, dem die in der Folge zu liefernden Beweise überzeugend vorkommen sollen, müsste erst sein und unser Dasein gläubig voraussetzen, weil wir in ihrem Vortrage redend zu ihm erscheinen“ (S. 75).

Bolzano zeigt nun zunächst, daß es Wahrheiten an sich gibt, und zwar in unendlicher Menge. Mit dem Ausdrucke „es gibt“ bezeichnet er nicht etwa die Existenz jener Wahrheiten: „Es gibt Wahrheiten an sich“, aber — „sie haben kein Dasein“ (S. 144). Bolzano erläutert seine Behauptung vielmehr dahin, „daß gewisse Sätze die Beschaffenheit von Wahrheiten an sich haben“ (ebd.). Aber diese Erklärung hilft uns nicht über die Unklarheit hinweg, die über die Bolzanosche Auffassung besteht. Und da er jede weitere Auseinandersetzung über den Sinn seiner Behauptung unterläßt, so ist es nicht zu verwundern, daß über den Ausdruck „es gibt“, den Bolzano als etwas ganz Selbstverständliches behandelt, viel gestritten worden ist. Mit Recht bezeichnet Bergmann (a. a. O., S. 17) solche Angaben als „höchst unvollkommen und dürftig“, weil sie zu den verschiedensten Interpretationen Anlaß geben. Bolzano hätte seine Behauptung, daß es Wahrheiten an sich gibt, die etwas von jedem

Gedachtwerden schlechthin Unabhängiges sind, die „nicht existieren", aber doch „ein Etwas" sind, durch eine erkenntniskritische Untersuchung über das Sein dieser transzendenten Sinneinheiten ergänzen müssen. Statt dessen begnügt er sich an dieser entscheidenden Stelle damit, den Sinn seiner Behauptung, daß es Wahrheiten an sich gibt, lediglich dahin zu erklären, daß diese Sätze „die Beschaffenheit von Wahrheiten an sich" haben. Der Mathematiker, der sich um die philosophische Grundlegung seiner Theorien nicht kümmert, mag sich unbedenklich dieser Ausdrucksweise bedienen, nicht aber der Philosoph, — zumal nicht in einem solchen Zusammenhange. Tatsächlich ist der Ausdruck „es gibt" in der Sprache der Mathematik allgemein üblich.[1]) So sagt man z. B., es gibt Quadratwurzeln aus 4, d. h. Zahlen, welche die Beschaffenheit haben, mit sich selbst multipliziert, 4 zu ergeben. Nach diesen kritischen Bemerkungen, die Bolzano wiederum als Mathematiker kennzeichnen, wenden wir uns dem Beweise zu.

Zunächst wird gezeigt, daß es wenigstens e i n e Wahrheit an sich gibt (W. I, § 31). Die Annahme, daß kein Satz wahr sei, widerlegt sich nämlich selbst, wenn wir nicht ein und denselben Satz für wahr und zugleich für falsch erklären wollen. Denn entweder ist diese Behauptung, daß kein Satz wahr sei, falsch; dann muß es demnach wenigstens einen wahren Satz geben. Oder aber jene Behauptung ist richtig, dann stellt sie selbst einen wahren Satz dar. Es gibt somit w e n i g s t e n s e i n e Wahrheit an sich. Aber auch diese ist nicht die einzige (§ 32). Denn wer nur eine einzige Wahrheit annimmt, etwa „A ist B", der muß notwendig die Behauptung: „Außer der Wahrheit A ist B gibt es sonst keine andere" für w a h r halten und damit bereits eine zweite Wahrheit zugeben. Daß diese Wahrheit wirklich eine n e u e Wahrheit ist, begründet Bolzano damit, daß sie aus ganz anderen Teilen bestehe als die ursprüngliche. Wer aber die Behauptung, daß es außer der Wahrheit „A ist B" keine andere gebe, für falsch erklärt, der gesteht ebenfalls zu, daß es wenigstens zwei Wahrheiten gibt. „Es ist daher nicht wahr, daß es nur eine Wahrheit gebe, sondern es gibt deren w e n i g s t e n s z w e i" (W. I, S. 146). In derselben Weise läßt sich zeigen, daß auch zwei Wahrheiten nicht die einzigen sein können. Bezeichnen wir die beiden Wahr-

[1]) A. Dyroff hat in seinem „Existenzialbegriff" (Freiburg i. B. 1902, S. 2 f.) verschiedene Anwendungsweisen des Wortes „Existenz" im allgemeinen Sprachgebrauch zusammengestellt und untersucht. — Vgl. dazu auch B. Erdmann, Log. I, S. 111 und Frege, Grundgesetze der Arithmetik I, S. XXV.

heiten mit „A ist B“ und „C ist D“, so ist die Behauptung „Nichts ist wahr außer den beiden Sätzen: A ist B, und C ist D“ offenbar ein neuer Satz, der wieder entweder wahr ist — dann enthält er eine dritte Wahrheit — oder aber falsch ist, womit ebenfalls das Vorhandensein wenigstens einer weiteren Wahrheit zugegeben wird. So kann man fortfahren. Wollte schließlich jemand nur die n Wahrheiten: A ist B, C ist D, . . . Y ist Z (im ganzen n Sätze) zugeben, so müßte er seine Behauptung folgendermaßen formulieren: „Außer den n Sätzen: A ist B, C ist D, . . . Y ist Z, ist sonst kein anderer Satz wahr“ (S. 147). Mit Hilfe dieser Behauptung ließen sich dann genau wie vorhin die n wahren Sätze um einen vermehren, wodurch die Menge der Wahrheiten auf $n + 1$ anwächst. Daraus folgt, „daß es der Wahrheiten unendlich viele gibt, indem die Annahme jeder endlichen Menge derselben einen Widerspruch in sich schließt“ (ebd.).

Bolzano hat den ersten Schritt dieses Beweises ohne Zweifel von der alten Philosophie übernommen. In einer Anmerkung (S. 145) erwähnt er, schon Aristoteles (Metaph. IV, 8) rüge den Selbstwiderspruch des Satzes, daß nichts wahr sei. Aber die Erweiterung des Beweises, daß es mehr als zwei Wahrheiten, ja unendlich viele gibt, stammt von Bolzano, wie er auch selbst hervorhebt (S. 147 Anm.). Offenbar ist diese Erweiterung aus rein mathematischen Erwägungen heraus entstanden. In den „Paradoxien“ (§ 13) benutzt Bolzano diesen Gedankengang zum Nachweise der „Gegenständlichkeit des Begriffes unendlich“ oder, wie die modernen Mathematiker sagen, zum Existenzbeweis unendlicher Mengen. Dort wird die Menge der Sätze, deren Bildungsgesetz durch das oben besprochene Beweisverfahren gegeben ist, in Parallele gesetzt zur Menge der natürlichen ganzen Zahlen, die aus der gegebenen Einheit entsprechend gebildet werden. Die Ähnlichkeit besteht darin, „daß es zu jedem Gliede der letzteren ein ihm entsprechendes der ersteren gibt, daß es somit für jede auch noch so große Anzahl auch eine ihr gleiche Anzahl verschiedener Sätze gibt, und daß wir immer noch neue Sätze darüber bilden können. . . . Woraus denn folgt, daß der Inbegriff all dieser Sätze eine Vielheit besitzt, die größer als jede Zahl, d. h. die unendlich ist“ (Paradoxien, S. 14). Die Bedeutung der Mathematik für diese Untersuchungen Bolzanos bedarf hier keiner weiteren Erklärung. Auch den modernen Mathematikern

sind ähnliche Erwägungen zum Nachweise der Existenz unendlicher Mengen durchaus nicht fremd.[1])

Wenn nun der Skeptiker auch zugeben muß, daß es in der Tat Wahrheiten gibt, und zwar unendlich viele, so kann er doch noch daran zweifeln, daß wir Menschen die Wahrheit mit völliger Gewißheit erkennen können. Der Begriff der Erkenntnis schließt den eines Urteils ein, und zwar versteht Bolzano unter Erkenntnis „ein jedes Urteil, das einen wahren Satz enthält, oder der Wahrheit gemäß oder richtig ist" (W. I, S. 163). Jede Erkenntnis ist also ein Urteil; umgekehrt aber kann man nicht jedes Urteil eine Erkenntnis nennen. „Unrichtige Urteile sind Irrtümer" (S. 154). Während eine Wahrheit an sich nicht existiert, wird jedem Urteil als „etwas Seiendem" die Existenz ausdrücklich zugesprochen. „Doch hat das Urteil sein Dasein nicht für sich, sondern nur in dem Gemüte eines gewissen Wesens, das eben deshalb das Urteilende genannt wird" (S. 155). Auch diese Bemerkungen Bolzanos helfen uns nicht über die Unklarheiten und Schwierigkeiten hinweg, an denen seine Urteilstheorie krankt.[2])

Wie beweist nun Bolzano, daß von den denkenden Individuen Wahrheiten mit strenger Gewißheit erkannt werden können. Ein Skeptiker darf als solcher kein Urteil fällen; er gäbe ja damit zu, daß er wenigstens eine Wahrheit erkenne. „Denn jedes Urteil ist doch nichts anderes als ein Satz, den der Urteilende selbst mit einem größeren oder geringeren Grade von Zuversicht für einen wahren Satz hält" (S. 170). Um demnach den Skeptiker zunächst von der Unhaltbarkeit seines völligen Zweifels zu überzeugen, sucht Bolzano ihm irgendein Urteil zu entlocken, „dessen Wahrheit ihm selbst so unwiderstehlich einleuchte, daß er, wenn wir im folgenden Augenblicke ihn darauf aufmerksam machen, wie er in diesem Urteile doch wenigstens eine Wahrheit erkenne, vergeblich bemühet sei, es sich wieder zweifelhaft zu machen" (ebd.). Dazu eignet sich im Grunde jede Frage, auf die der Skeptiker eine Antwort gibt, von deren Wahrheit er selbst überzeugt ist. Bolzano stellt ihm die Frage: „Ob denn nicht wenigstens das wahr sei, daß er Vorstellungen

---

[1]) Man vergl. z. B. Dedekind, Was sind und was sollen die Zahlen? Braunschweig 1887, § 5.

[2]) Man vergleiche z. B. die Stellungnahme Geysers zum log. Transzendentalismus, a. a. O., S. 103 f.

h a b e?" (W. I, S. 173). Diese Wahrheit werde nun der Zweifler gewiß einsehen, meint Bolzano; er beweise sie ja durch seinen Zweifel. Wie könne er sonst an der Wahrheit gewisser Sätze zweifeln, wenn er keine Vorstellungen von ihnen habe! Der extreme Skeptizismus hebt sich also selbst auf.

Nun beginnt wieder das mathematische Beweisverfahren, indem Bolzano zeigt, daß die Erkenntnis dieser einen Wahrheit — er bezeichnet sie mit A — nicht die einzige sein kann. Der Skeptiker muß nämlich die Frage, „ob wohl der Satz, daß er die Wahrheit A erkenne, ein w a h r e r Satz sei?" konsequenterweise bejahen und damit zugleich eingestehen, daß er auch seine Wahrheit e r k e n n e, wodurch die ursprüngliche Erkenntnis A um eine neue vermehrt wird. Denn das Urteil „Ich erkenne die Wahrheit A" ist aus dem oben angeführten Grunde von dem Satze A selbst verschieden. Dieser Schluß läßt sich nun beliebig oft anwenden, und so kann analog dem vorigen Beweise nachgewiesen werden, „daß die Menge der Erkenntnisse, deren ein Mensch sich erinnerlich ist, niemals so groß sei, daß er dieselbe, wenn ihm ein ferneres Nachdenken verstattet ist, nicht noch vermehren könne" (S. 174). Wenn er nämlich n Wahrheiten erkennt und das Urteil fällt: „Alle diese Sätze erkenne ich", so gelangt er durch dieses Urteil zur Erkenntnis einer neuen Wahrheit, wodurch die Summe der erkannten Wahrheiten auf $n + 1$ anwächst. Hier offenbart sich m. E. die ganze Unfruchtbarkeit der mathematischen Betrachtungsweise. Um das einzusehen, genügt es, nach dem angegebenen Bildungsgesetz nur etwa den Fall für $n = 3$ in Worte zu kleiden. Bolzano hat die Schwächen dieser Untersuchungen wohl erkannt, wenn er bemerkt, daß durch diesen Beweis im günstigsten Falle nichts m e h r zu erreichen sei, „als den vollendeten Zweifler aus seinem Zustande des Zweifelns a u f e i n i g e A u g e n b l i c k e herauszureißen" (ebd.).

Unsere Ausführungen haben den überragenden Einfluß der Mathematik auf die Grundlegung der Logik Bolzanos nachgewiesen. Nachdem er uns zunächst mit dem idealen Forschungsgebiet der Logik, den Sätzen und Wahrheiten an sich, vertraut gemacht hat, führt er einen exakten mathematischen Beweis, daß dieses Gebiet über jede endliche Grenze erhaben ist: Die Menge der Wahrheiten an sich ist u n e n d l i c h, und wir Menschen können mit strenger Gewißheit eine Reihe dieser Wahrheiten erkennen.

II. Abschnitt.

Die Lehre von den Vorstellungen an sich.

1. Begriff der Vorstellung an sich.

Ausgehend von dem Begriffe eines Satzes, gelangt Bolzano zu einem neuen wichtigen Grundbegriffe, der „Vorstellung an sich". Wir haben diesen Begriff schon früher (Abschn. I, 2) beiläufig erwähnt, müssen uns aber hier noch etwas eingehender mit ihm befassen. Bolzano betrachtet jeden Satz als ein Gebilde, das aus bloßen Vorstellungen zusammengesetzt ist. Eine Vorstellung läßt sich daher erklären als „alles dasjenige, was als Bestandteil in einem Satze vorkommen kann, für sich allein aber noch keinen Satz ausmacht" (W. I, S. 216). Dabei ist die subjektive oder „gehabte" Vorstellung wohl zu unterscheiden von der Vorstellung an sich, und zwar derart, „daß unter Vorstellungen in objektiver Bedeutung oder Vorstellungen an sich etwas verstanden werde, woraus ein Satz an sich, unter Vorstellungen in subjektiver Bedeutung oder gedachten Vorstellungen etwas, woraus ein gedachter Satz . . . wie ein Ganzes aus seinen Teilen susammengesetzt ist" (S. 99). Diese Definition zeigt deutlich die unpsychologische Denkweise unseres mathematisch analysierenden Logikers. Ohne jede Einschränkung erklärt er die Vorstellung an sich als Teil eines Satzes an sich.

Während die subjektive Vorstellung etwas rein Psychisches ist und als reales Erlebnis eines denkenden Individuums auch Dasein hat, ist die Vorstellung an sich „ein nicht in dem Reiche der Wirklichkeit zu suchendes Etwas . . . ", „welches den nächsten und unmittelbaren Stoff[1]) der subjektiven Vorstellung ausmacht"

[1]) Wenn Bolzano „aus Mangel eines besseren Wortes" die Vorstellung an sich als „Stoff" der subjektiven Vorstellung bezeichnet, so versteht er darunter doch nicht den „Gegenstand", auf den sich eine subjektive Vorstellung bezieht (W. I, S. 218 f.).

(W. I, S. 217). Die Vorstellung an sich wird auch „nicht vervielfacht wie die ihr zugehörige subjektive Vorstellung", wenn mehrere Personen sie auffassen. Vielmehr bezeichnet jedes nicht mehrdeutige Wort eine einzige objektive Vorstellung, und alle subjektiven Vorstellungen, denen dieselbe Vorstellung an sich zugrunde liegt, sind „einander gleich zu nennen, wiefern wir auf die Unterschiede, welche sie etwa in ihrer Lebhaftigkeit usw. haben, nicht achten" (S. 218). Nach dieser Erklärung ist die Vorstellung an sich gleichbedeutend mit dem, was Husserl die ideale Einheit der Bedeutung genannt hat. Demnach dürfen aber nur solche Teile eines Satzes an sich als Vorstellung an sich bezeichnet werden, die für sich genommen tatsächlich etwas bedeuten, während nach der ersten Definition auch jede unselbständige Teilbedeutung innerhalb eines Satzes als Vorstellung an sich erklärt wird. Diese Definition, die ohne Zweifel auf die mathematische Betrachtungsweise Bolzanos zurückzuführen ist, muß daher als verfehlt bezeichnet werden.

Die Ausführungen Bolzanos über den Begriff der Vorstellung an sich haben zu verschiedenen Interpretationen Anlaß gegeben, wobei sich die wechselndsten Auffassungen auf Bolzano selbst berufen können. Bergmann kommt nach eingehenden kritischen Untersuchungen (a. a. O., S. 28) zu dem Ergebnis, daß schwer mit aller Sicherheit zu deuten sei, was sich Bolzano unter der Vorstellung an sich gedacht habe. Sicher sei nur das Problem, das er damit beantworten wollte: „Welcher Sachverhalt liegt der Rede von der einen übereinstimmenden Bedeutung vieler Vorstellungen zugrunde?" Dieses Problem läßt sich nun restlos lösen, wenn man die Vorstellung an sich lediglich als abstraktes Moment an inhaltlich gleichen Vorstellungsakten auffaßt.[1]) Bei den Sätzen an sich ist uns diese Deutung schon begegnet; sie würde auch dort zur Erklärung ausreichen, wenn es sich nur darum handelte, die Einheit der Bedeutung zu lösen. Aber mit Rücksicht auf das zweite Problem, das Bolzano zur Aufstellung der Sätze an sich geführt hat, die objektive Begründung der Wahrheit, genügte es nicht, die Sätze an sich lediglich als abstrakte Seite der realen Urteilsakte zu erklären. Bei den Vorstellungen an sich

[1]) Diese Ansicht hat schon Herbart vertreten: „Unsere sämtlichen Gedanken lassen sich von zwei Seiten betrachten, teils als Tätigkeiten unseres Geistes, teils in Hinsicht dessen, was durch sie gedacht wird; in letzter Beziehung heißen sie Begriffe, welches Wort, indem es das Begriffene bezeichnet, zu abstrahieren gebietet von der Art und Weise, wie wir den Gedanken empfangen" (Einleitung in die Philosophie, II. Abschn.).

aber reicht die „Zweiseitentheorie“ völlig aus, und diese Auffassung wird weder von Bolzano selbst noch von seinen Schülern abgelehnt.[1]) Auch B. Kerry vertritt die Ansicht, daß eine Vorstellung an sich nichts anderes sei als eine subjektive Vorstellung, abstrahiert von dem für gewisse Zwecke gleichgültigen Momente ihres Vorgestelltwerdens; in Anbetracht der bekannten Zweideutigkeit des Wortes Vorstellung spreche man hier besser von einem Vorgestellten an sich.[2]) Freilich ist damit das „An sich“ Bolzanos nicht geklärt. Aber diese Erklärung ist ja nicht Aufgabe der vorliegenden Arbeit, die lediglich den Einfluß der Mathematik auf das Bolzanosche System nachweisen will. Und da muß festgestellt werden, daß die Interpretation der Vorstellungen an sich als abstrakte Momente an inhaltlich gleichen Vorstellungsakten erneut unsere Annahme bestätigt, daß die Beschäftigung mit der Mathematik Bolzano zur Aufstellung seiner logischen Grundbegriffe geführt hat. Bei Betrachtung der ideellen mathematischen Gebilde war es für ihn selbstverständlich, von allen subjektiven Bedingungen des Vorstellens abzusehen und an den Vorstellungen nur das Vorgestellte in abstrakter Reinheit zu betrachten. Daher empfiehlt er auch als Vorbereitung für das Studium seiner Logik die eingehende Beschäftigung mit den „abgezogenen Begriffen“ der Mathematik (W. I, S. 43). Und zur Erläuterung des Begriffes Vorstellung an sich führt er „die Anzahl der Weinbeeren“ an, „welche im nächstvergangenen Sommer auf Italiens Boden gereift“. Diese Zahl sei eine Vorstellung an sich und völlig unabhängig davon, ob sie in dem Bewußtsein irgendeines Individuums auftauche. Von diesem Gesichtspunkte aus müssen wir es begreiflich finden, daß Bolzano ganz allgemein die Forderung aufstellte, bei allen subjektiven Vorstellungen die ihnen zugrunde liegende Vorstellung an sich zu berücksichtigen.

Wir haben oben die Sätze an sich in Parallele gesetzt zu dem idealen Forschungsgebiete der Mathematik, wobei wir an die Äußerung Bolzanos anknüpften, es müsse „auch dem Logiker freistehen, von Wahrheiten an sich zu sprechen, ganz mit demselben Rechte, mit dem der Geometer von Räumen an sich (d. h.

---

[1]) R. Zimmermann, Philosophische Propädeutik, Wien 1867 (3. Aufl.), § 14, 18 und 26.

[2]) B. Kerry, über Anschauung und ihre psychische Verarbeitung (Vierteljahrsschr. f. wiss. Philos., Bd. XV, S. 132 ff.). — Auch Bolzano empfindet den „Mangel einer recht schicklichen Benennung“ für die Vorstellung an sich (W. I, S. 223).

von bloßen Möglichkeiten gewisser Orte) spricht, ohne an eine Erfüllung derselben durch die Materie zu denken" (W. I, S. 114). Diese Analogie können wir nunmehr weiterführen, indem wir die Vorstellungen an sich in Parallele setzen zu den einzelnen Teilen, aus denen die mathematischen Gebilde zusammengesetzt sind. Und in der Tat ist die ganze Erklärung der Vorstellung an sich — wir haben nur einige Partien wiedergegeben — so gehalten, als ob Bolzano sich mit dem Begriffe irgendeines mathematischen Elementes, etwa einer Linie als Teil einer Fläche, auseinandersetzte. Unbedenklich nimmt er an, daß die Elemente der an sich geltenden Sätze ebenfalls die Natur des An-sich haben müssen, also Vorstellungen an sich sind.[1]) Wenn er nämlich die objektiven Vorstellungen lediglich als Teile eines Satzes an sich erklärt, dann muß er ihnen auch die Eigenschaft des An-sich zusprechen. Ganz abgesehen davon, daß die Annahme für sich bestehender Vorstellungen überhaupt überflüssig ist, mußte die in Frage stehende Definition als unbrauchbar und erkenntnistheoretisch wertlos bezeichnet werden.[2]) Daß Bolzano dennoch an ihr festgehalten hat, beweist seine mathematische Einstellung bei der Behandlung dieses Problems und macht zugleich auch den Mangel in erkenntnistheoretischer Hinsicht erklärlich.

2. Teile und Inhalt einer Vorstellung an sich.

Durch Zerlegung eines Satzes an sich in seine Bestandteile gewinnt Bolzano den Begriff der Vorstellung an sich. Aber auch die meisten subjektiven wie objektiven Vorstellungen sind noch zusammengesetzt. Ihre Zergliederung in einzelne Teilvorstellungen erfolgt ebenfalls auf Grund mathematischer Überlegungen. Wenn man irgendein Ganzes, das aus mehr als zwei Teilen besteht, zunächst in eine Anzahl Teile zerlegt, die kleiner als die Zahl aller ist, so sind mehrere dieser Teile, vielleicht aber auch alle selbst

[1]) Bolzano sagt: „Es scheint mir ferner offen am Tage zu liegen, daß die Bestandteile, aus denen ein Satz an sich, der nichts Gedachtes ist, bestehet, auch selbst nichts Gedachtes, und somit nicht gedachte, sondern nur solche Vorstellungen sein können, wie ich oben die objektiven beschrieb" (W. I, S. 222).

[2]) Beim Vorstellen gibt es nur eine mögliche Verhaltungsweise zum Objekt. „Hier geht im Unterschiede des Objekes schlechtweg die ganze Differenz der Akte auf, welche gegenständlich begründet und nicht etwa rein subjektiv ist" (Bergmann, a. a. O., S. 31 f.).

noch zusammengesetzt. Die zuerst gewonnenen Teile heißen die „näheren", die Elemente dieser Teile die „entfernteren" Teile des Ganzen (W. I, S. 251). Diese Bezeichnungen lassen sich besonders dann vorteilhaft verwenden, wenn sich die näheren Teile von den entfernteren „durch einen merkwürdigen Umstand" unterscheiden. Das ist bei den Vorstellungen nach Ansicht Bolzanos in verschiedener Hinsicht der Fall. Zunächst können wir die „Teile einer Vorstellung, für deren Bezeichnung die Sprache eigene Worte besitzt, durch deren Angabe also die Vorstellung selbst leicht wieder dargestellt werden kann, ihre näheren, diejenigen aber, in welche diese noch weiter zerlegt werden können, ihre entfernteren Teile nennen" (S. 252). Eine weitere Möglichkeit, die eingeführte Unterscheidung anzuwenden, bietet die Tatsache, daß eine Vorstellung zuweilen einen ganzen Satz enthält. So ist z. B. in dem Ausdrucke „Ein Geschöpf, das auf Erden wohnt" der Relativsatz „mit der Vorstellung Geschöpf auf eine so eigene Art verbunden, daß das Ganze, welches aus dieser Verbindung entsteht . . . nichts aussagt und somit keinen Satz, sondern nur eine bloße Vorstellung liefert" (S. 252 f.). In diesem Falle gelten die einzelnen Bestandteile des Relativsatzes als die entfernteren, die übrigen als die näheren Teile der Vorstellung. Interessant ist auch die Stellungnahme Bolzanos zu dem Einwand, daß eine Vorstellung, die selbst wieder Vorstellungen als Teile enthält, nicht mehr eine Vorstellung sei, sondern ein Inbegriff von Vorstellungen genannt werden müsse. Er verneint diese Ansicht mit der Begründung, daß ja auch eine Maschine, deren einzelne Teile selbst wieder Maschinen sind, in gewisser Beziehung sehr wohl den Namen einer einzigen Maschine verdient. „Wie nämlich diese nur eine ist in Hinsicht auf die Wirkung, die nur sie selbst, und nicht ihre einzelnen Teile für sich hervorbringen, so ist auch die aus mehreren einzelnen Vorstellungen zusammengesetzte Vorstellung nur eine, hinsichtlich auf die Gegenstände, die durch sie vorgestellt werden, oder auch hinsichtlich auf die Stelle, die sie in einem Satz vertreten kann" (S. 253).[1])

Betrachten wir nunmehr den Zusammenhang, der zwischen den Teilen einer Vorstellung besteht, so zeigt sich, daß die einzelnen Bestandteile zuweilen in einer ganz bestimmten „Aufeinanderfolge" erscheinen, deren Abänderung auch eine andere Vorstellung

[1]) In enger Anlehnung an Bolzanos „nähere" und „entferntere" Teile einer Vorstellung unterscheidet Husserl „Gesamtakt" u. „Teilakt" (L. U. II, S. 377).

zur Folge hat. Ein Beispiel bietet die Vorstellung „2^3". Selbstverständlich handelt es sich hier nicht um eine zeitliche Folge. Wir können von den Teilen einer Vorstellung an sich, der ja keine Existenz zugesprochen wird, weder sagen, „daß sie zu gleicher Zeit nebeneinander bestehen, noch daß sie in verschiedenen Zeiten einander nachfolgen" (W. I, S. 256).

Neben diesen Vorstellungen, deren Bestandteile in einer bestimmten Folge auftreten, gibt es auch solche, bei denen die Teile „in gar keiner Ordnung und Aufeinanderfolge, sondern so wie die Glieder in einer Summe erscheinen" (ebd.). Haben wir z. B. die Vorstellung von einem „A, das die Beschaffenheiten b, b', b'', . . . hat", so treten zwar die einzelnen Beschaffenheitsvorstellungen b, b', b'', . . . in unserem Bewußtsein nicht alle gleichzeitig auf, wir können sie „wegen der Eigentümlichkeit unserer beschränkten Natur" nur in einer gewissen Zeitenfolge denken, aber diese Zeitenfolge gehört nicht zu der entsprechenden Vorstellung an sich. Die einzelnen Teilvorstellungen lassen sich vielmehr wie die Glieder einer Summe beliebig vertauschen, ohne daß sich dadurch die Vorstellung als solche ändert. Bei dieser Art der Zusammensetzung gilt also das Kommutationsgesetz der Algebra. Bolzano macht auch Gebrauch von der mathematischen Kurzschrift. Er bezeichnet die Vorstellung eines „Etwas, das die Beschaffenheiten a, b, c, . . . hat" mit [Etwas](a + b + c + . . .) (S. 456). Damit zeigt er deutlich, daß seine Untersuchungen über die Zusammensetzung der Vorstellungen von mathematischen Gesichtspunkten aus erfolgten.

Die wichtigste Folge, die Bolzano aus diesen Überlegungen zieht, ist die notwendige Annahme durchaus einfacher Vorstellungen. „Einfach" heißt eine Vorstellung, „die keine Teile, sie mögen selbst wieder bloße Vorstellungen oder ganze Sätze sein, in sich faßt" (S. 263). Daß es solche Vorstellungen tatsächlich gibt, wird auf Grund geometrischer Überlegungen bewiesen. Jeder zusammengesetzte Gegenstand muß Teile enthalten, die ihrerseits nicht mehr zusammengesetzt, also durchaus einfach sind. Betrachtet man die Menge der Teile, aus denen ein Ganzes besteht, so sind folgende Fälle möglich:

1. Ist die Menge der Teile endlich, dann ist die Richtigkeit obiger Behauptung evident. „Denn hier müssen wir nach einer endlichen Menge von Einteilungen, z. B. von Halbierungen,

immer zu Teilen, die nicht weiter zerlegbar und also einfach sind, geraten" (W. I, S. 264).

2. Die Menge der Bestandteile ist unendlich. Ein Beispiel bietet uns eine Linie oder Fläche, überhaupt jede räumliche Ausdehnung. Hier gelangt man durch keine, auch noch so oft wiederholte Zerlegung zu absolut einfachen Teilen. Bolzano zieht nun hieraus keineswegs den Schluß, daß in diesem Falle überhaupt keine einfachen Elemente vorhanden sind. Aus dem Begriffe der Zusammengesetztheit folgt vielmehr, daß die Teile nicht immer wieder zusammengesetzt sein können. Denn „sind diese Teile selbst wieder zusammengesetzt, so erklären sie uns nur die Zusammengesetztheit einer bestimmten Art . . . , nicht aber die Zusammengesetztheit, die an den Gegenständen überhaupt stattfindet" (ebd.). Um diese restlos erklären zu können, muß man absolut einfache Teile annehmen. Das zeigt deutlich ein Hinweis auf die geometrischen Gebilde. So nimmt der Mathematiker bei den Linien, Flächen und Körpern einfache Elemente an, nämlich „die Punkte, die aber freilich dem Ganzen, das sie bilden, eben darum, weil sie dasselbe erst in unendlicher Menge erzeugen, nicht gleichartig sind" (ebd.).[1]). Bolzano zieht daraus den Schluß: „Auch eine jede Vorstellung also, wäre sie noch so zusammengesetzt, und enthielte sie selbst, wenn es sonst möglich ist, unendliche viele Teile, muß doch auch solche haben, die keine weitere Zerlegung zulassen" (S. 265). Diese Untersuchungen lassen deutlich erkennen, daß Bolzano in seiner Analyse der Vorstellungen von der Mathematik beeinflußt ist. Der Hang zu geometrischen Spekulationen hat ihn zu dieser Theorie geführt.

Bei den zusammengesetzten Vorstellungen interessiert uns auch die Menge der einzelnen Bestandteile. Diese Menge bezeichnet Bolzano als Inhalt der Vorstellung an sich, und zwar versteht er darunter „nur die Summe der Bestandteile, aus denen die Vorstellung besteht, nicht aber die Art, wie diese Teile untereinander verbunden sind" (S. 244). Der Inhalt einer Vorstellung ist demnach eine kollektive Menge im Sinne der Mathematik. Durch die bloße Angabe des Inhaltes ist daher das Wesen einer Vorstellung noch nicht bestimmt. Aus demselben

[1]) In den „Beiträgen" (S. 46) weist Bolzano darauf hin, daß die Begriffe der Linie, Ebene usw. zusammengesetzt seien, und daß man sich somit von der Verbindlichkeit, sie zu definieren, durchaus nicht befreien könne.

Inhalte können ganz verschiedene Vorstellungen hervorgehen, je nach der Art, wie die einzelnen Elemente zusammengefaßt werden. So schreibt Bolzano z. B. den beiden Vorstellungen „3^5“ und „5^3“ denselben Inhalt zu, obwohl sie als Vorstellungen doch sehr von einander verschieden sind. Diese Auffassung ist weder logisch noch psychologisch richtig. Das angeführte Beispiel zeigt aber, daß Bolzano sich bei der Definition des Inhaltes einer Vorstellung bewußt des mathematischen Begriffes Summe bedient hat; denn bei einer Summe gilt das Kommutationsgesetz, das bei der Erklärung des Inhaltes ausdrücklich erwähnt wird. Die Definition des Inhaltes einer Vorstellung lediglich als Menge ihrer Bestandteile ohne Rücksicht auf ihre gegenseitige Stellung ist für die Logik wertlos. B. Erdmann betont, daß sich die Beziehung der Merkmale durch die Summation nicht ausreichend wiedergeben lasse.[1]) Richtig definiert Drobisch den Inhalt als die Gesamtheit der in bestimmter Ordnung durch Determination miteinander verbundenen Merkmale.[2]) Viele zusammengesetzte Vorstellungen haben auch einen Bestandteil, zu dem alle übrigen Teile in einer gewissen Abhängigkeit stehen. So ist z. B. in der Vorstellung „Kundiger aller europäischen Sprachen“ der Bestandteil „Kundiger“ oder vielmehr „Mensch“ ein solcher Grundbestandteil, zu dem die anderen attributiv beigefügt sind. Bolzano übersieht diese Relation völlig, ihn interessiert als Mathematiker nur die Menge der einzelnen Bestandteile einer Vorstellung, nicht aber ihre gegenseitige Beziehung. Es wird sich zeigen, daß diese falsche Auffassung gewisse Untersuchungen, auf die wir an anderer Stelle zurückkommen, nachteilig beeinflußt hat.

Rein mathematischer Art sind die Untersuchungen, die Bolzano über die Möglichkeit der Inhaltsveränderung einer Vorstellung anstellt. Jede Vorstellung lässt sich durch Hinzufügung anderer Vorstellungen oder auch ganzer Sätze in eine neue Vorstellung verwandeln, die notwendig einen größeren Inhalt hat als die ursprüngliche. Man kann sagen, „daß der Inhalt keiner Vorstellung so groß sei, daß sich nicht eine angeben ließe, die einen noch größeren Inhalt hätte. Die Vermehrung des Inhaltes der Vorstellungen und ihre Zusammensetzbarkeit geht also in das Unendliche“ (W. I, S. 265). Bolzano legt

[1]) Logik I, S. 195. — Vgl. auch die Stellungnahme Lotzes gegen die Vernachlässigung der gegenseitigen Stellung der Merkmale (Log. 1874, S. 46).
[2]) Neue Darstellung der Logik, Leipzig 1887, § 25.

auf diese Feststellung so großen Wert, daß er nicht weniger als drei Beweise für ihre Richtigkeit erbringt, von denen wir einen kurz wiedergeben wollen.

Jede Vorstellung X läßt sich mit einer beliebigen anderen Vorstellung Y durch Vermittlung des Begriffes „und" zu einer neuen Vorstellung „X + Y" verbinden, die „gewiß kein Satz, sondern die Vorstellung von einer Summe" zweier Vorstellungen ist (W. I, S. 266). Durch fortgesetzte Summation lassen sich immer neue Vorstellungen von größerem Inhalte bilden. Theoretisch gibt es also keine Vorstellung größten Inhaltes. Die Mathematik, speziell die Mengenlehre macht von diesem Beweisverfahren häufig Gebrauch, z. B. bei dem Nachweise, daß es keine größte natürliche Zahl gibt. Nimmt man nämlich an, n sei die größte dieser Zahlen, so kann man durch Addition der Einheit immer wieder eine neue Zahl bilden, die um 1 größer ist als die vorhergehende.

Wenn sich der Inhalt einer Vorstellung auch beliebig vergrößern läßt, so ist er deshalb doch keine *stetige* Größe. Bolzano wendet sich hier gegen H. Fries (System d. Log., § 21). Stetig heißt eine Größe, „die sich, wenn sie geändert werden soll, nicht sprungweise ändern muß, d. h. die eine jede Änderung, welche nur kleiner als eine gegebene ist, zu erfahren vermag" (W. I, S. 283). Nach dieser Definition muß eine stetige Größe, wenn sie zusammengesetzt ist, wie z. B. eine Linie, aus *unendlich* vielen Teilen bestehen. Es gibt nun, wie wir gesehen haben, durchaus *einfache* Vorstellungen, und die meisten unserer Vorstellungen sind aus einer bloß *endlichen* Anzahl von Teilen zusammengesetzt. Der Inhalt dieser Vorstellungen kann also eo ipso keine stetige Größe sein. Aber auch bei den Vorstellungen, die aus einer *unendlichen* Menge von Teilen bestehen, kann man nicht von einem stetigen Inhalte sprechen. Ist z. B. „A" eine solche Vorstellung, so unterscheiden sich die beiden Vorstellungen „A, welches b hat" und „A, welches *nicht* b hat" inhaltlich nur „um einen einzigen einfachen Teil, nämlich den Begriff *nicht*". Der Unterschied der beiden Vorstellungen kann demnach nicht mehr kleiner werden, was dem Begriffe der Stetigkeit widerspricht. Zu den Untersuchungen Bolzanos über den Inhalt einer Vorstellung sei bemerkt, daß sich hier Logik und Mathematik zum Teil berühren. Ganz allgemein kann man sagen, daß die Arbeit der wissenschaftlichen Logik, soweit sie *quantitativ*

ausdrückbare Gegenstände behandelt, durch Anwendung entsprechend angepaßter mathematischer Methoden gefördert werden kann. Dabei handelt es sich nicht um eine eigentliche mathematische Grundlegung, wie vielfach behauptet wird, sondern um eine Anleihe bei der Mathematik. Die Untersuchungen Bolzanos sind jedoch zu sehr rein mathematischer Art. Daß er der Mannigfaltigkeit der logischen Begriffsbildung nicht genügend Rechnung getragen hat, ist auf seine einseitige mathematische Betrachtungsweise, insbesondere auf die verfehlte Definition des Inhaltes einer Vorstellung zurückzuführen. Als rein mathematische Spekulation muß schließlich die Feststellung bezeichnet werden, daß der Inhalt einer Vorstellung „bis ins Unendliche" vermehrt werden könne.

3. Gegenstand und Umfang einer Vorstellung.

Wenn Bolzano die Vorstellung an sich als „Stoff" einer subjektiven Vorstellung bezeichnet, so meint er damit nicht den Gegenstand, auf den sich eine Vorstellung bezieht; vielmehr will er den Gegenstand nicht nur von der subjektiven Vorstellung, sondern auch von der ihr zugrunde liegenden Vorstellung an sich unterschieden wissen. Gegenstand einer Vorstellung ist ihm „jenes (bald existierende, bald nicht existierende) Etwas, von dem wir zu sagen pflegen, daß sie es vorstelle, oder daß sie die Vorstellung davon sei" (W. I, S. 219).

Zwischen Vorstellung und Gegenstand bestehen gewisse Beziehungen, die vielfach zu der Behauptung Anlaß gegeben haben, die Vorstellung eines Gegenstandes sei lediglich aus den Vorstellungen seiner Beschaffenheiten (Merkmale) zusammengesetzt. Bolzano bestreitet diese Auffassung (S. 270 ff.). Er ist der Ansicht, daß nicht allen Teilen einer Vorstellung Teile des Gegenstandes entsprechen, und daß auch umgekehrt nicht alle Beschaffenheiten eines Gegenstandes in der Vorstellung mitgedacht werden.

Den ersten Teil dieser Behauptung begründet er folgendermaßen: Wenn wir uns irgendeinen Gegenstand mit den Beschaffenheiten b, b', b", ... vorstellen, bilden wir die Vorstellung von einem „Etwas, welches die Beschaffenheiten b, b', b", ... hat". In dieser

Vorstellung kommen aber neben den Vorstellungen der einzelnen Beschaffenheiten noch andere vor, „namentlich noch die Vorstellung eines Etwas, die Vorstellung des beziehenden Fürwortes welches und die Vorstellung des Habens", die zur Verbindung der einzelnen Beschaffenheitsvorstellungen dienen (W. I, S. 271). Diese eigenartige Begründung verrät wieder den Einfluß der Mathematik. Um das einzusehen, erinnern wir uns des symbolischen Ausdruckes für die Vorstellung eines Gegenstandes mit den Beschaffenheiten b, b', b" ..., [Etwas](b + b' + b" + . . .), der deutlich die funktionale Betrachtungsweise erkennen läßt. Eine mathematische Funktion ist als solche durch ihre Argumente zwar vollkommen bestimmt, zu ihrer Berechnung aber müssen noch gewisse Konstanten und die Verknüpfungsart der einzelnen Größen gegeben sein. Betrachten wir z. B. den Flächeninhalt eines Trapezes als Funktion der beiden Grundlinien und der Höhe, $J = f(x, y, z)$, worin x und y die beiden Grundlinien und z die Höhe bedeuten, so sehen wir, daß der Flächeninhalt J noch nicht bestimmt ist, wenn wir nur die unabhängigen Veränderlichen x, y, z kennen; wir bedürfen vielmehr zur Berechnung des Inhaltes noch der Konstante $^1/_2$ und der Angabe der Verknüpfungsart aller Größen: $J = {}^1/_2 (x + y) \cdot z$. Ganz analog ist die Forderung, die Bolzano bei der Bildung der Vorstellung eines [Etwas](b + b' + b" + . . .) erhebt. Auch hier genügt zur Vorstellung des Gegenstandes nicht, sich nur die einzelnen Beschaffenheiten vorzustellen, man bedarf dazu noch der Vorstellungen, die ihre Verbindung vermitteln. Das mathematische Vorbild mag hier die rein logische Analyse gefördert haben.

Auf mathematische Überlegungen stützt sich ferner die Behauptung, daß es Beschaffenheiten gibt, die dem Gegenstande einer Vorstellung notwendig zukommen, ohne jedoch als Bestandteile in ihr mitgedacht zu werden. So können wir z. B. aus dem Begriffe des Quadrates die Beschaffenheit ableiten, daß Seite und Diagonale in dem Verhältnisse $1 : \sqrt{2}$ stehen, „obgleich wir uns gar nicht bewußt sind, daß die Vorstellung dieser Beschaffenheit in unserem Begriffe vom Quadrate schon als Bestandteil liege" (S. 271 f.). Es gibt sogar Vorstellungen, aus denen sich eine unendliche Menge von Beschaffenheiten folgern läßt, die in der Vorstellung gewiß nicht mitgedacht werden, ihrem Gegenstande aber notwendig zukommen. So ist z. B. die irrationale Größe $\sqrt{2}$ aus unendlich vielen Teilen zusammengesetzt:

$\sqrt{2}=1+{}^{4}/_{10}+{}^{1}/_{100}+{}^{4}/_{1000}+{}^{2}/_{10000}+\ldots$ Die Beschaffenheit eines jeden dieser unendlich vielen Brüche, deren Summe die betreffende Irrationalzahl ausmacht, ist ohne Zweifel zugleich auch eine Beschaffenheit der Irrationalzahl selbst. „Sollte es also wahr sein", so folgert Bolzano, „daß eine jede Beschaffenheit eines Gegenstandes, welche aus seiner Vorstellung notwendig folgt, schon als Bestandteil in ihr gedacht werden müsse, so müßte die Vorstellung $\sqrt{2}$ und jede ihr ähnliche aus einer unendlichen Menge verschiedener Teile zusammengesetzt sein . . . Wir müßten also imstande sein, mit unserer endlichen Denkkraft eine unendliche Menge von Vorstellungen zu gleicher Zeit zu erfassen" (W. I, S. 273). Aus diesen und ähnlichen Erwägungen schließt Bolzano richtig, daß nicht allen Teilen eines Gegenstandes auch Teile der Vorstellung entsprechen. Was in dem Begriffe eines Gegenstandes liegt, braucht deshalb noch nicht mit dem Begriffe aktuell mitgedacht zu werden. Die allgemeinen Vorstellungen stellen daher ihren Gegenstand nur unvollständig vor.[1])

Die Frage nach der Menge der Gegenstände, auf die sich eine Vorstellung bezieht, führt zu dem Begriffe des Umfangs. Bolzano versteht unter dem Umfange einer Vorstellung, den er auch Gebiet oder Sphäre nennt, „diejenige Beschaffenheit einer Vorstellung, vermöge deren sie eben nur diese und keine andern Gegenstände vorstellt" (S. 298).[2]) Ein Gebiet kommt demnach nur „Gegenstandsvorstellungen" zu, d. h. solchen, die sich auf einen oder mehrere Gegenstände beziehen.[3]) Nach der gegebenen Erklärung ist das Gebiet einer Vorstellung erst dann vollständig bestimmt, wenn man nicht nur die Menge der zugehörigen Gegenstände aufweist, sondern auch angibt, welche es sind. Ein einzelner Gegenstand oder auch jeder Inbegriff von Gegenständen, der kleiner als die Summe aller ist, heißt ein Teil des Gebietes jener Vorstellung. So ist z. B. „Julius Cäsar" ein Teil des Gebietes der Vorstellung „Mensch".

---

[1]) Vgl. dazu auch Marty, Untersuchungen zur Grundlegung der allgem. Grammatik und Sprachphilosophie, Bd. I, Halle 1908, S. 448 und Twardowski, Zur Lehre von Inhalt und Gegenstand der Vorstellungen, Wien 1894, § 8.

[2]) Diese Erklärung des Umfangs stimmt im wesentlichen mit der vorwiegend üblichen Lehre überein. Sigwart gibt teilweise im Widerspruch dazu dem Begriffsumfang eine dreifache Bedeutung. Er unterscheidet 1. den logischen Umfang, 2. den empirischen Umfang eines Begriffes und 3. den empirischen Umfang des Namens. Logik, I. Bd., 2. Aufl., S. 347 ff.

[3]) Vorstellungen, denen kein Gegenstand entspricht, sind nach Bolzano z. B. die Vorstellungen „$\sqrt{-1}$" und „Nichts" (W. I, S. 220).

Die Menge der Gegenstände, die zu einer Vorstellung gehören, hat — wie jede Menge — eine bestimmte Größe, die man die Weite des Gebietes nennt. Die genaue Erklärung dieses Begriffes hat gewisse Ähnlichkeit mit der Definition des verwandten Begriffes der Größe einer räumlichen Ausdehnung. Was man z. B. bei einer Linie oder einer Fläche ihre Größe nennt, das ist bei dem Gebiete einer Vorstellung die Weite. So unrichtig es nun ist, die Länge einer Linie oder den Inhalt einer Fläche lediglich als Menge aller in ihnen enthaltenen Punkte zu erklären, ebensowenig darf man die Weite einer Vorstellung bloß als Menge ihrer Gegenstände definieren (W. I, S. 302, 4. Anm.). Den mathematischen Begriff der Größe einer Ausdehnung erläutert Bolzano an folgendem Beispiele: Um die Länge einer Strecke A D mit den beliebigen Teilpunkten B und C zu ermitteln, legen wir der Messung eine bestimmte Einheitsstrecke zugrunde. Für die einzelnen Teilstrecken finden wir etwa: $AB = \alpha$, $BC = \beta$, $CD = \gamma$. Die ganze Strecke A D besitzt dann die Größe λ, wenn die Beziehung gilt: $\lambda = \alpha + \beta + \gamma$. Die Größe λ hängt also wesentlich ab von der Wahl der zugrunde gelegten Einheit. Analog definiert Bolzano die Weite einer Vorstellung streng mathematisch „als eine Größe, die aus der Menge der sämtlichen Gegenstände dieser Vorstellung nach einem solchen Gesetze abgeleitet wird, daß sie die Summe der Größen ist, die nach demselben Gesetze aus den einzelnen Teilen, in welche jene Menge etwa zerlegt wird, abgeleitet werden" (S. 303). Diese Definition gestattet, die Weite einer Vorstellung entsprechend der Größe einer räumlichen Ausdehnung ganz verschieden auszudrücken, je nach Wahl der zugrunde gelegten Einheit. Bezeichnet man z. B. die Weite einer Vorstellung, die nur einen Gegenstand hat, mit 1, so ist die Weite einer Vorstellung, die zwei Gegenstände umfaßt, gleich 2. Allgemein ist unter dieser Voraussetzung die Weite einer jeden Vorstellung gleich der Anzahl ihrer Gegenstände. Bezieht sich im Grenzfalle eine Vorstellung auf unendlich viele Gegenstände, so ist auch ihre Weite als unendlich groß zu bezeichnen. Die Menge der Gegenstände, auf die sich z. B. die Vorstellung „Dreieck" bezieht, ist größer als jede angebbare endliche Zahl, die Weite dieser Vorstellung ist daher unendlich groß. „Da nun das Unendliche in eben der Rücksicht, in der es unendlich ist, keine Bestimmung zuläßt, so kann die Weite des Umfanges solcher Vorstellungen nie an sich selbst und völlig, sondern

nur im Vergleiche mit anderen und in gewisser Rücksicht bestimmt werden" (S. 298 f.). Bezeichnen wir die Weite der Vorstellung „Dreieck" mit ∞ und nehmen wir diese Größe als Einheit an, so ist die Weite der Vorstellung „Innenwinkel eines Dreiecks" = 3; denn zu jedem Dreiecke gehören drei Innenwinkel. Es ist also „unter gewissen Umständen möglich, die Weite auch mancher anderen Vorstellung, die unendlich viele Gegenstände hat, bald nur ungefähr, bald auch genau durch Zahlen zu bestimmen" (W. I, S. 303, 4. Anm.). Demgegenüber müssen wir mit A. Dyroff feststellen, daß es sich hier nur um ein relatives Maß handelt.[1]) Der Umfang eines Begriffs kann nicht zahlenmäßig bestimmt werden. Auch Th. Ziehen wendet sich gegen die Definition das Umfangs als Inbegriff aller Gegenstände, die einer Vorstellung von bestimmtem Inhalte entsprechen. Sehr treffend weist er darauf hin, daß nach dieser Erklärung der Umfang eines Begriffes, z. B. einer Semmelsorte, sich ändern würde, wenn mehr Semmeln der Sorte gebacken würden.[2]) Die mathematische Betrachtungsweise ist also hier jedenfalls verfehlt.

Charakteristisch für die Bedeutung der Mathematik ist auch die Untersuchung der Frage, ob sich Vorstellungen mit jeder beliebigen endlichen Menge von Gegenständen bilden lassen, ob es insbesondere auch Einzelvorstellungen gibt, d. h. solche, die nur einen einzigen Gegenstand vorstellen. Die letzte Frage ist ohne weiteres zu bejahen. So bezieht sich z. B. die Vorstellung „Pythagoräischer Lehrsatz" offenbar auf nur einen Gegenstand, „gerade darum, weil wir an einen nur denken" (W. I, S. 307). Eine ganze Gattung von Einzelvorstellungen untersteht der Form „Das All der Dinge, welche (die Beschaffenheit) b haben". Dahin gehören z. B. die Vorstellungen „das Weltall", „der Inbegriff aller Wahrheiten" und dgl., bei denen es schon in der Form liegt, daß es nur einen einzigen Gegenstand geben kann, der durch sie vorgestellt wird; „denn der Begriff aller eine gewisse Beschaffenheit b habender Gegenstände kann doch nur einer sein" (S. 307 f.). Nun ist es leicht, die Frage zu beantworten, ob es auch Vorstellungen gibt, die eine beliebige endliche Menge von Gegenständen umfassen. Sind z. B. die Vorstellungen A, B, C Einzelvorstellungen, so bezieht sich die Vorstellung „Eines der Dinge

[1]) A. Dyroff, Logik und Noetik, Freiburg i. B. 1915, S. 46 f.

[2]) Th. Ziehen, Lehrbuch der Logik auf positivistischer Grundlage mit Berücksichtigung der Geschichte der Logik, Bonn 1920, S. 531, 14. Anm.

A, B" sicher nur auf 2 Gegenstände, die Vorstellung „Eines der Dinge A, B, C" nur auf 3 Gegenstände; allgemein hat die Vorstellung „Eines der Dinge A, B, C, . . ." (im ganzen n Einzelvorstellungen) genau n Gegenstände. Eine andere Möglichkeit, Vorstellungen zu bilden, die sich auf eine bestimmte endliche Menge von Gegenständen beziehen, bietet die Vorstellung der Form „Eine zwischen 1 und n liegende ganze Zahl", wobei n irgendeine Zahl größer oder gleich 3 bedeutet. So hat z. B. die Vorstellung „Eine zwischen 1 und 10 liegende ganze Zahl" genau 8 Gegenstände (W. I, S. 308). Erinnern wir uns hier, daß Bolzano auch „gegenstandlose" Vorstellungen annimmt, so haben wir damit das Ergebnis, daß es Weiten jeder beliebigen Größe gibt. Die gegenstandlosen Vorstellungen haben die Weite 0, Individualvorstellungen die Weite 1 und Allgemeinvorstellungen die Weite 2 bis ∞.

Die Verwandtschaft des Begriffes Weite einer Vorstellung mit dem Begriffe einer räumlichen Ausdehnung gestattet auch die Veranschaulichung des Umfangs durch geometrische Figuren. Diese Darstellung ist sehr alt; wir finden sie schon bei Joh. Philoponus.[1]) Bolzano versinnbildlicht den Umfang einer Vorstellung durch eine geschlossene Figur in der Ebene; er betont aber ausdrücklich, daß auch ein- und dreidimensionale Gebilde der Veranschaulichung dienen können (S. 300).

Mit Beziehung auf den vorhergehenden Paragraphen sei hier noch erwähnt, daß Bolzano den Satz vom umgekehrten Verhältnis der Begriffsseiten ablehnt. Es ist nicht unwahrscheinlich, daß der Ausdruck „umgekehrtes Verhältnis", der hier bekanntlich nicht die Bedeutung „algebraisch reziprok" hat, unserem mathematisch eingestellten Logiker zunächst den äußeren Anlaß zur Kritik dieses Satzes bot. „Denn wer sollte glauben, daß der Umfang einer Vorstellung gerade auf die Hälfte oder ein Dritteil herabgesetzt werde, wenn man die Anzahl der Bestandteile, aus denen sie zusammengesetzt ist, verdoppelt oder verdreifacht!" (S. 568). Daß dieses freilich nicht der eigentliche Sinn des Satzes ist, weiß Bolzano auch. Aber weder den erläuternden Satz, je größer der Inhalt, desto kleiner der Umfang, noch die Umkehrung dieses Satzes läßt er gelten.[2])

[1]) Philoponus, Comm. in Analyt. prior., Akad. Ausg. Berol. 1905, S. 381. — Vgl. auch Ziehen, a. a. O., S. 228.

[2]) Kant formuliert den Satz folgendermaßen: „Inhalt und Umfang eines Begriffes stehen gegeneinander in umgekehrtem Verhältnisse. Je mehr nämlich ein Begriff unter sich enthält, destoweniger enthält er in sich und umgekehrt" (Log. i. W. W. Hart., I. Bd., S. 427).

Der Satz wird abgelehnt, weil es möglich sei, den Inhalt einer Vorstellung zu vermehren, ohne daß sich dadurch ihr Umfang vermindere. „Dazu wird nämlich nur erfordert, daß man Bestandteile zusetze, aus welchen keine neuen Beschaffenheiten des vorgestellten Gegenstandes folgen, wie dieses bei den sogenannten überfüllten Begriffen geschieht" (W. I, S. 569). Als Beispiel wird der Begriff einer „runden Kugel" angeführt, dessen Inhalt nach der gegebenen Erklärung größer sei, als der des Begriffes „Kugel", der Umfang beider Begriffe aber sei derselbe. Sachlich viel bedeutsamer für die Begriffstheorie ist der zweite Einwand, „es gebe Zusätze zu einer Vorstellung, durch welche mit ihrem Inhalte zugleich auch ihr Gebiet vermehrt wird" (ebd.). So entstehe z. B. aus der Vorstellung „eines Menschen, der alle europäischen Sprachen versteht" durch den Zusatz „lebende" die neue Vorstellung „eines Menschen, der alle lebenden europäischen Sprachen versteht", eine Vorstellung, die gewiß einen größeren Inhalt, aber gleichzeitig auch einen größeren Umfang als die ursprüngliche habe.[1]) Dieses Beispiel zeige zugleich auch die Unhaltbarkeit der umgekehrten Behauptung, daß man zur Verminderung des Umfanges einer gegebenen Vorstellung stets ihren Inhalt vermehren müsse. „Dies wäre nur nötig", so argumentiert Bolzano, „wenn jede Vorstellung, die einer anderen untergeordnet ist, immer aus dieser und noch etwas Anderem zusammengesetzt sein müßte". Die Ansicht Bolzanos geht vielmehr dahin, „daß die Gegenstände, die unter einer gewissen Vorstellung A enthalten sind, Beschaffenheiten haben können, deren Vorstellungen keineswegs als Bestandteile in der Vorstellung A erscheinen" (S. 569/70).

Die Argumente, die Bolzano zur Entkräftigung des Satzes vom umgekehrten Verhältnis der Begriffsseiten anführt, sind die notwendige Folge seiner mathematisch beeinflußten Untersuchungen über den Inhalt einer Vorstellung. Richtig an der Bolzanoschen Kritik ist die Feststellung, daß der Inhalt einer Vorstellung durch Überfüllung vermehrt wird, ohne daß sich der Umfang ändert. Dabei mag dahingestellt bleiben, ob die Annahme überfüllter Vorstellungen überhaupt berechtigt ist. Der in Frage stehende Satz gilt tatsächlich nur für ökonomische Begriffe, d. h. solche, deren Inhalt keinen Bestandteil mehr als einmal enthält, nicht

[1]) Bolzano führt noch ein zweites Beispiel an, das aber keine neuen Gesichtspunkte bietet. Wir begnügen uns daher mit der Untersuchung des oben angeführten Beispiels, dessen Erledigung auch das zweite Beispiel entkräftet.

aber für abundante Begriffe. Der Haupteinwand Bolzanos, daß in manchen Fällen eine Bereicherung des Inhaltes geradezu eine Vergrößerung des Umfanges bewirke, schöpft seine scheinbare Beweiskraft aus einer Unklarheit der Reichtumsbestimmung bei Begriffen, wie Kreibig gezeigt hat.[1]) Vergleichen wir nämlich die beiden zugehörigen Beispiele Bolzanos in ihrer streng logischen Darstellung, „Kundiger aller europäischen Sprachen" und „Kundiger aller lebenden europäischen Sprachen", so zeigt sich, daß im ersten Falle dem Grundbestandteil „Kundiger" alle Attribute einer Kategorie beigefügt sind, im zweiten Falle aber der Bestandteil „alle" ausgeschaltet und durch einen anderen („lebend") ersetzt wird, der nur einen Teil jener Attribute umfaßt. Bolzano läßt zwar in dem zweiten Beispiele den Bestandteil „alle" stehen, übersieht aber dabei, daß dieser Bestandteil sich im ersten Falle auf „europäisch" bezieht, während er im zweiten Falle zu „lebend" gehört, also in beiden Beispielen einen ganz verschiedenen Sinn hat.[2]) Tatsächlich handelt es sich bei dem neu hinzukommenden Bestandteile „lebend" nicht um eine Determination des ursprünglichen Inhaltes, sondern nur um eine Substitution eines ausfallenden Bestandteiles. Dadurch aber werden die beiden Inhalte hinsichtlich ihres Reichtums inkommensurabel, womit auch der Einwand Bolzanos fällt.

Ganz abgesehen davon, daß hier nicht Begriffe verglichen werden, sondern Anzahlen von Individuen[3]), besteht der Fehler Bolzanos darin, daß er die Relation „reicher — ärmer" lediglich durch numerisches Abzählen der Inhaltsbestandteile in dem sprachlichen Ausdrucke der Begriffe gewinnt, ein Fehler, der nur durch die vorwiegend mathematische Betrachtungsweise erklärlich wird.

---

[1]) Kreibig, Über ein Paradoxon in der Logik Bolzanos; Vierteljahrsschr. für wiss. Philosophie, Bd. 28 (1904), S. 375 ff.

[2]) Kreibig weist darauf hin, daß die Fassung „lebende alle Sprachen" unmöglich sei, was eben zeige, daß in der Tat eine Änderung des alten Inhaltes durch Ausscheidung eines Bestandteiles stattgefunden habe (a. a. O., S. 389).

[3]) Vgl. A. Dyroff, a. a. O., S. 47: Bei den Einwendungen gegen den Satz vom umgekehrten Verhältnis der Begriffsseiten, die u. a. auch Höfler, Th. Lipps und E. Cassirer machen, wird meistens ein neuer Begriff von „Begriff" konstruiert.

4. Vorstellungen von Inbegriffen.

Es entspricht der mathematischen Einstellung Bolzanos, daß er besonders die Vorstellungen eingehend untersucht, die sich auf einen Inbegriff von Dingen beziehen. Bei der Untersuchung dieser „sehr wichtigen" Gattung zusammengesetzter Vorstellungen handelt es sich in erster Linie nicht um eine philosophische Grundlegung mathematischer Begriffe, sondern vielmehr um eine Anleihe bei der Mathematik, d. h. um eine Übernahme mathematischer Begriffe, die für die Zwecke der Philosophie besonders definiert werden. Darin zeigt sich gerade der Einfluß der Mathematik.

Unter einem Inbegriffe versteht Bolzano eine Zusammenfassung von Dingen, derart, „daß in der bloßen Vorstellung von einem Inbegriffe noch gar nicht festgesetzt sein soll, in welcher Ordnung und Aufeinanderfolge die hier zusammen genommenen Dinge erscheinen, ja ob es überhaupt nur eine solche Ordnung unter denselben gebe und geben könne" (W. I, S. 393). Lassen sich z. B. mehrere Gegenstände A, B, C, D, . . . angeben, von denen jeder an einem Erfolge M mitgewirkt hat, so stellen wir uns die vollständige Ursache von M als Inbegriff der Gegenstände A, B, C, D, . . . vor, wobei wir die Ordnung unberücksichtigt lassen, in der die einzelnen Dinge an der Wirkung beteiligt waren. In der subjektiven Vorstellung denken wir die Gegenstände eines solchen Inbegriffes zwar stets in einer bestimmten Reihenfolge, aber die Elemente der entsprechenden Vorstellung an sich sind dieser Folge nicht unterworfen, sie stehen vielmehr „alle an einerlei Stelle" und sind „mit der Vorstellung, die das Wort Inbegriff ausdrückt, alle auf einerlei Weise vereinigt". In den „Paradoxien" (§ 3) wird der Inbegriff von Dingen ebenfalls definiert, und zwar ausdrücklich in einer Weise, „wie es die Zwecke der Mathematik sowohl als auch der Philosophie in unzähligen Fällen erheischen". Dort erfahren wir auch näheres über die logische Bedeutung der Inbegriffe. In allen Sätzen, so heißt es, in denen das Bindewort „und" vorkomme, also z. B. in dem Satze: „Die Sonne, die Erde und der Mond — stehen in gegenseitiger Einwirkung aufein-

ander", sei das Ganze der Gegenstände, von dem etwas ausgesagt werde, ein Inbegriff von Dingen. Daraus folge, daß jeder beliebige Gegenstand A mit beliebigen anderen B, C, D, . . . an sich schon einen Inbegriff bilde, von dem sich irgendeine Wahrheit aussagen lasse, sofern nur jede der Vorstellungen A, B, C, D, . . . sich auf einen anderen Gegenstand beziehe.

Eine neue Gruppe von Inbegriffen erhält man, wenn die Art der Verbindung oder Anordnung der einzelnen Gegenstände ausdrücklich als gleichgültig bezeichnet wird. Inbegriffe dieser Art nennt Bolzano Mengen. Er versteht darunter „jeden beliebigen Inbegriff, bei welchem die Verbindungsart der Teile als etwas Gleichgültiges angesehen werden soll . . . , auch wenn er der Teile nur sehr wenige, ja auch nur zwei enthielte" (W. I, S. 399). Eine Menge ist z. B. ein Geldhaufen, bei dem es völlig gleichgültig ist, in welcher Ordnung die einzelnen Geldstücke zusammenliegen. Der Begriff einer Menge, den Bolzano hier entwickelt, deckt sich im wesentlichen mit dem Mengenbegriff der modernen Mengenlehre. Während letztere hingegen auch Mengen mit nur einem oder gar keinem Element kennt, verlangt Bolzano — entsprechend dem sprachlichen Ausdrucke („und") —, daß eine Menge wenigstens 2 Gegenstände enthält. Ein weiterer Unterschied besteht in der Erklärung des Begriffes Teil einer Menge. Die heutige Mengenlehre bezeichnet als Teil einer Menge M jede Menge, deren sämtlichen Elemente in M enthalten sind. Diese Definition schließt auch den Fall ein, daß die Teilmenge aus nur einem Element von M besteht, wobei natürlich dieses Element als Teilmenge von M logisch eine ganz andere Bedeutung hat, als ihm als Element der Menge schlechthin zukommt. Bei Bolzano dagegen sind die Begriffe „Teil" und „Gegenstand" (Element) eines Inbegriffes völlig gleichbedeutend. Er erklärt ausdrücklich, daß er nur die einzelnen Gegenstände, die in ihrer Gesamtheit einen Inbegriff bilden, als Teile des Inbegriffes angesehen wissen will.

Die moderne Fassung des Mengenbegriffes, die auf G. Cantor zurückgeht, ist ohne Zweifel logisch wertvoller als die Erklärung Bolzanos. Cantor definiert die Menge als jede Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten zu einem Ganzen.[1]) In dieser Erklärung ist von einer Anordnung der einzelnen Elemente keine Rede, während Bolzano die

[1]) Georg Cantor, Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre, Leipzig 1883.

Gleichgültigkeit der Anordnung in die Definition des Mengenbegriffes aufnimmt. Er kennt daher auch keine geordneten Mengen im Sinne Cantors, die durch ihren Ordnungstypus charakterisiert sind. Die Bolzanoschen Untersuchungen über den Mengenbegriff (W. I, § 82 — 87 und Parad.) bilden nur die „schwachen Keime" der modernen Mengen- oder Mannigfaltigkeitslehre. Wir können uns daher auch nicht auf eine Kritik dieser Untersuchungen einlassen; diese müßte an der modernen Mengenlehre ansetzen, was über den Rahmen der vorliegenden Arbeit weit hinausginge. [1]) Wesentlich aber für unsere Untersuchungen ist die Feststellung, daß Bolzano die Menge zuerst in seiner Wissenschaftslehre behandelt und ihre Bedeutung für die Logik erkannt hat. Später hat er dieses Problem wieder aufgegriffen und in den „Paradoxien" ein Werk geschaffen, das keinem Mathematiker unbekannt sein sollte! [2])

Die Anordnung der Elemente einer Menge ist nach der Bolzanoschen Erklärung gleichgültig. Daraus folgt aber noch nicht, daß auch die Teile der einzelnen Elemente als Teile des Ganzen angesehen werden dürfen. Das zeigt das oben erwähnte Beispiel des Geldhaufens. Wenn man nämlich statt des einen oder anderen Geldstücks die Teile setzen wollte, in welche dieses durch mechanische oder chemische Kräfte noch zerlegt werden kann, so dürfte sich der Wert des Ganzen wohl ändern! Gleichwohl gibt es Inbegriffe, die auch diese Betrachtungsweise gestatten, d. h. Inbegriffe, „in denen nicht bloß die Verbindungsart der Teile als etwas Gleichgültiges, sondern die Teile der Teile als Teile des Ganzen betrachtet werden dürfen". Derartige Inbegriffe nennt Bolzano „mit einem von den Mathematikern entlehnten Ausdrucke Summen" (W. I, S. 400). Es handelt sich hier um einen Begriff, der für die besonderen Zwecke der Logik eingeführt wird. Weshalb sonst die Bemerkung Bolzanos, daß er den Ausdruck „Summe" von den Mathematikern übernommen habe! In der Anmerkung zu dem betr. Paragraphen spricht er sich noch deutlicher aus, indem er sagt, die Bedeutung, welche

[1]) Vgl. Ziehen, Verhältnis der Logik zur Mengenlehre, Berlin 1917.

[2]) Prihonsky sagt im Vorwort zu den Paradoxien von Bolzano: „Er lieferte hiermit . . . der gelehrten Welt einen neuen Beweis, welch ungemeine Einsichten in die abstraktesten Tiefen der Mathematik, der reinen Naturwissenschaft und Metaphysik ihm waren zuteil geworden. Wahrhaftig, hätte Bolzano nichts anderes geschrieben und uns hinterlassen als diese Abhandlung allein: er müßte, wie wir fest glauben, schon um ihretwillen den ausgezeichnetsten Geistern unseres Jahrhunderts beigezählt werden!"

die Mathematiker mit dem Worte Summe verbinden, sei keine andere als die von ihm angegebene; es sei denn, daß sie — wie es ihre Wissenschaft mit sich bringe — den Begriff überall nur auf Größen anwenden. Das Wesentliche der Summe scheint Bolzano in dem Gelten des assoziativen Gesetzes zu erblicken. „Denn das eben ist der Begriff einer Summe, daß $A + (B + C) = A + B + C$ sein müsse" (Parad., S. 4). Selbstverständlich kann man nur dann von Summen sprechen, wenn dieses Gesetz gilt; aber umgekehrt gibt es gewiß auch andere Fälle, in denen das assoziative Gesetz Gültigkeit hat, z. B. bei der Multiplikation: $a \cdot b \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$. Das Gelten des assoziativen Gesetzes allein kann daher nicht als charakteristisch für den Begriff der Summe angesehen werden.[1])

Es mag hier auch darauf hingewiesen werden, daß Bolzano in den „Beiträgen" (Anhang, § 8) an dem Beispiele der Addition zeigt, daß die Kantsche Erklärung der mathematischen Erkenntnis durch die reine Anschauung verfehlt ist.[2]) Das Resultat einer Addition, z. B. $7 + 2 = 9$, lässt sich ohne Zuhilfenahme der Anschauung beweisen, wenn die oben gegebene Definition der Summe vorausgeht. Der Beweisgang ist kurz folgender:

> „Daß $1 + 1 = 2, \ldots 7 + 1 = 8, \; 8 + 1 = 9$, sind bloße Erklärungen und willkürliche Sätze. Es ist daher $7 + 2 = 7 + (1 + 1)$, (per def.) $= (7 + 1) + 1$, (per propos. praeced.) $= 8 + 1$, (per def.) $= 9$, (per def.)." (Beitr., S. 147).

Couturat bedient sich in seiner Polemik gegen Kants Ansicht derselben Argumentationsweise, ohne aber an Bolzano anzuknüpfen.[3])

Bolzano befaßt sich in seiner Logik auch mit Reihen, die er als eine „äußerst merkwürdige" Art von Inbegriffen be-

---

[1]) Vgl. die Anmerkungen von H. Hahn zu den von A. Höfler neu herausgegebenen Paradoxien, S. 134.

[2]) Die Ansicht Kants von der den Urteilen zugrunde liegenden Zeitanschauung fand in der Arithmetik immer nur wenig Zustimmung, anders in der Geometrie. Bolzano lehnt die Auffassung Kants aber auch für die Geometrie ab. Alle Sätze der reinen Mathematik sind reine Begriffswahrheiten (Versuch einer objektiven Begründung der Lehre von der Zusammensetzung der Kräfte, Prag 1842, und „Beiträge", Anhang § 9). Die moderne Mathematik hat diese Lehre, die auch schon Leibniz vertreten hatte, zum Teil wieder aufgenommen. Vgl. dazu auch A. Voß, Über das Wesen der Mathematik, S. 53 u. 73 f.

[3]) Couturat, Die philosophischen Prinzipien der Mathematik, übersetzt von C. Siegel, Leipzig 1908, S. 269 Anm.

zeichnet. „Ein gewisser Inbegriff von Gegenständen . . . K, L, M, N, O, . . .“ bildet „eine Reihe, wenn sich zu einem jeden derselben, z. B. M. irgendein anderer, in diesem Inbegriffe vorkommender Gegenstand N vorfindet, von welchem eines von beiden gilt, entweder daß N sich aus M, oder daß M sich aus N nach einem für den ganzen Inbegriff gleichlautenden Gesetze . . . bestimmen läßt“ (W. I, S. 401). So bilden z. B. die 4 Sätze: A ist B, B ist C, C ist D, D ist E, eine Reihe. Die einzelnen Gegenstände — in dem angeführten Beispiele die einzelnen Sätze — , die in ihrer Gesamtheit die Reihe darstellen, werden Glieder der Reihe genannt, und die Regel, nach der sich aus jedem Gliede ein anderes bestimmen läßt, heißt das Bildungsgesetz dieser Reihe. Was nun die Vorstellung einer solchen Reihe betrifft, so ist durchaus nicht notwendig, daß sie die Vorstellungen aller einzelnen Glieder als Bestandteile enthält. Zur Vorstellung der Reihe 1, 2, 4, 8, 16, . . . , die aus unendlich vielen Gliedern besteht, genügen schon folgende Angaben: „Eine Reihe, deren erstes Glied 1 ist, jedes folgende aber aus dem nächst vorhergehenden durch Verdoppelung desselben gebildet und kein Glied als das letzte angesehen wird“ (S. 402/3).

Hahn wendet gegen die Bolzanosche Definition der Reihe ein, sie sei offenbar viel weiter, als es Bolzano selbst beabsichtigt habe[1]). Das ist aber m. E. durchaus nicht der Fall. Es war gar nicht die Absicht Bolzanos, die mathematische Reihe zu definieren; er wollte vielmehr einen neuen Begriff für die Zwecke der Logik aufstellen, bei dessen Erklärung er sich nur an der Mathematik orientierte. In seiner Wissenschaftslehre (I, S. 405, Anm.) führt er auch den Nachweis, daß seine Erklärung weit genug ist, um sich auf alles zu erstrecken, was nicht nur in der Mathematik, sondern namentlich auch in den philosophischen Wissenschaften als eine Reihe angesehen wird.

Zu den Inbegriffsvorstellungen gehört auch der Begriff der Größe, den wir nicht unerwähnt lassen wollen. Ein Gegenstand wird als Größe bezeichnet, „sofern wir uns vorstellen, er sei zu einer Art von Dingen gehörig, deren je zwei immer nur eins von folgenden zwei Verhältnissen gegeneinander an den Tag legen können: sie sind entweder einander gleich, oder das eine derselben erscheint als ein Ganzes, das einen dem andern

[1]) Anmerkungen zu den Paradoxien, S. 135.

gleichen Teil in sich faßt" (W. I, S. 409). Dieselbe Erklärung findet sich in den Paradoxien (S. 4). Demnach sind M und N zwei Größen, wenn nur folgende Fälle möglich sind: Entweder ist $M = N$ oder $M = N + \nu$ oder $N = M + \mu$, wobei von den Teilen μ und ν dasselbe gilt, d. h. daß sie entweder gleich sind, oder der eine ein Teil des andern ist. Diese Formulierung gibt zu gewissen Bedenken Anlaß. Bolzano will die Null nicht als Größe angesehen wissen (Parad., S. 19); andererseits aber unterscheidet er positive und negative Größen (Parad., S. 25, Anm. und Beiträge, Einleitung), so daß nicht einzusehen ist, weshalb er der Null den Größencharakter abspricht. Hahn hegt nun gegen die Ausführungen Bolzanos noch andere Bedenken, die ich aber nicht teilen kann. Er betrachtet als Beispiel jede Elektrizitätsmenge als Inbegriff von positiven und negativen Elementarquanten. Die an den Bolzanoschen Begriff der Summe gestellten Forderungen seien hier erfüllt. Nach dieser Erklärung lasse sich die Elektrizitätsmenge 5 als Summe von 3 positiven und 2 positiven Elementarquanten darstellen; die Elektrizitätsmenge 5 sei daher größer als die Elektrizitätsmenge 3. Andererseits aber lasse sich nach dieser Definition die Elektrizitätsmenge 3 als Summe von 5 positiven und 2 negativen Elementarquanten auffassen. Danach müßte die Elektrizitätsmenge 3 größer sein als die Elektrizitätsmenge 5. Der Widerspruch, den Hahn hier aufweisen will, ist aber nicht vorhanden. Seine Ausführungen fußen auf einer falschen Auffassung des Bolzanoschen Summenbegriffs. Bolzano verlangt für den Begriff der Summe nicht nur das Gelten des assoziativen Gesetzes, sondern auch, daß „die Teile der Teile als Teile des Ganzen" angesehen werden können. Diese Erklärung gestattet nicht die Darstellung der Elektrizitätsmengen 3 als Summe von 5 positiven und 2 negativen Elementarquanten, weil die zweite Bedingung hier nicht erfüllt ist.

Eingehend befaßt sich Bolzano auch mit dem Begriffe der unendlichen Größe. Die Definition des Unendlichen als Grenze des unbegrenzten Wachsens einer Veränderlichen (Cauchy) wird abgelehnt, weil es sich dabei nur um ein Wachsen über alle endlichen Grenzen handelt, nicht aber um die Erklärung der unendlichen Größe selbst.[1]) Wollte man diese Definition

[1]) In ähnlicher Weise definiert die moderne Mathematik den uneigentlichen Grenzwert: Eine Funktion $f(x)$ hat für $x \to a$ den Grenzwert ∞, wenn für alle hinlänglich nahe an a gelegenen (aber von a verschiedenen) Werte

gelten lassen, dann müßte man analog die Null als Grenze der unbegrenzten Abnahme für das unendlich Kleine erklären (Parad., § 12, 1). Dieser Einwand Bolzanos ist durchaus berechtigt. Auch die Erklärung des Unendlichen als einer Größe, die nicht vermehrt werden kann (Spinoza), erweist sich als falsch. Die Menge der Punkte einer Strecke AB ist gewiß unendlich; gleichwohl wird diese Punktmenge vermehrt, wenn wir die Menge der Punkte hinzufügen, die in einer beliebigen Verlängerung der Strecke AB liegen (W. I. S. 413, Anm.). Es ist bemerkenswert, daß auch G. Cantor die Definition des Unendlichen als des Unvermehrbaren zurückweist. Noch weniger befriedigend ist die Erklärung jener, die sich an die Bestandteile des Wortes halten, und das als unendlich erklären, was kein Ende hat (Parad., § 12, 3). Bolzano definiert das Unendliche als „eine Vielheit von der Art A, die so beschaffen ist, daß jede endliche Vielheit von der Art A nur als ein Teil von ihr erscheint, d. h. daß es zu jeder endlichen Vielheit von der Art A einen dieser gleichkommenden Teil in ihr gibt" (W. I. S. 410). Die Unendlichkeit ist demnach keine qualitative, wie Hegel meinte, sie kommt nur Vielheiten zu, d. h. Mengen von Einheiten. Wer also von dem eigentlichen Unendlich spricht, muß eine Vielheit voraussetzen.

Den Existenzbeweis unendlicher Größen erbringt Bolzano in der Weise, daß er einige unendliche Vielheiten in unserer Erfahrung aufzuweisen sucht. Den Nachweis unendlich vieler Wahrheiten an sich haben wir schon kennengelernt. Auch die Menge aller ganzen Zahlen ist unendlich, wobei Bolzano aber den Beweis unterläßt, daß es Zahlen schlechthin gibt. (Parad., § 15). Auf dem Gebiete des Wirklichen ist z. B. Gott ein Unendliches, unendlich in seinem Wissen, in seinem Wollen und in seinem Wirken nach außen (§ 25).

Bolzano hat in seinen „Paradoxien" das Unendliche, speziell das Verhältnis unendlicher Mengen näher untersucht, wobei er zu dem bedeutenden Resultate kommt: „Zwei Mengen, die beide unendlich sind, können in einem solchen Verhältnisse zueinander stehen, daß es einerseits möglich ist, jedes der einen Menge zugehörige Ding mit einem der anderen zu einem

---

von x immer f(x) größer als A ist, wie groß die Zahl A auch sein mag (Hahn). Diese Definition bezieht sich aber nicht auf das „eigentliche" oder „aktuale" Unendlich, das Bolzano im Auge hat, sondern nur auf das „uneigentliche" oder „potentielle" Unendlich. — Vgl. Paradoxien, S. 136, Anm. zu § 12.

Paare zu verbinden mit dem Erfolge, daß kein einziges Ding in beiden Mengen ohne Verbindung zu einem Paare bleibt, und auch kein einziges in zwei oder mehreren Paaren vorkommt; und dabei ist es doch andererseits möglich, daß die eine dieser Mengen die andere als einen bloßen Teil in sich faßt" (Parad., S. 28). Wir können diese Untersuchungen, die in mathematischen Fachkreisen längst gewürdigt sind [1]), hier ganz übergehen und uns mit dem Hinweis begnügen, daß G. Cantor in seinen Untersuchungen über die Mächtigkeit die Ergebnisse Bolzanos aufgegriffen und ihre Bedeutung ins rechte Licht gerückt hat.

Schließlich wollen wir von den mathematisch beeinflußten Untersuchungen Bolzanos über Inbegriffsvorstellungen noch die „Ausnahmsvorstellungen" erwähnen. Diese enthalten den Begriff der Ausnahme, „den auch die Mathematiker kennen und mit dem Worte Abziehen bezeichnen. N von M abziehen heißt, ein Ding X finden, das zu N hinzugesetzt, eine dem Dinge M gleichgeltende Summe erzeugt." (W. I, S. 414). Denken wir uns den Inbegriff aller Dinge, auf die sich eine Vorstellung A bezieht, mit Ausnahme der namentlich angegebenen Dinge a, α, . . . , so stellen wir uns dasjenige vor, „was verbunden mit a, α, . . . den Inbegriff aller A, d. h. einen Inbegriff ausmacht, von welchem jedes A ein Teil und jeder Teil ein A ist" (S. 415). Eine solche Ausnahmevorstellung haben wir z. B., wenn wir uns das Weltall vorstellen als den „Inbegriff alles Wirklichen mit Ausnahme Gottes".

Diese Ausführungen lassen zur Genüge das Streben Bolzanos erkennen, Begriffe der Mathematik seinen logischen Untersuchungen zunutze zu machen. Dabei handelt es sich in erster Linie nicht um eine philosophische Grundlegung mathematischer Begriffe, um Logik der Mathematik, sondern um einen Versuch, die Logik zu mathematisieren, in gewissem Sinne also um Mathematik der Logik. Diese Unterscheidung hat man bei Bolzano m. W. noch nicht gemacht. Man spricht bei den in Frage stehenden Untersuchungen immer nur von Philosophie der Mathematik, während es sich in Wirklichkeit um eine Einführung mathematischer Begriffe in die Logik, also um Hilfeleistungen der Mathematik handelt. Zuweilen läßt sich allerdings eine scharfe Grenze nicht ziehen.

---

[1]) Vgl. z. B. A. Schoenflies, Bericht über die Mengenlehre; Jahresbericht der deutschen Mathem. Ver., VIII.

Als ein besonderes Verdienst Bolzanos muß hervorgehoben werden, daß er durch die Aufstellung des Mengenbegriffes der Philosophie ein neues Arbeitsfeld eröffnet hat.

5. Verhältnisse zwischen Vorstellungen an sich.

Als eine besondere Art zusammengesetzter Vorstellungen haben wir früher die Vorstellung eines „Etwas, das (die Beschaffenheit) b hat" kennengelernt. Bolzano bezeichnet eine solche Vorstellung schlechthin als K o n k r e t u m und kleidet sie in die symbolische Form [Etwas](b), die er zuweilen auch durch den entsprechenden großen lateinischen Buchstaben ersetzt. [Etwas](b) und B bedeuten demnach dieselbe konkrete Vorstellung. Die Beschaffenheitsvorstellung b heißt „in der Rücksicht, daß sie als ein Bestandteil in jener konkreten erscheint, das A b s t r a k t u m derselben" (W. I, S. 259 f.). So ist z. B. die Vorstellung „Tier", d. h. die Vorstellung eines „Etwas, das die Beschaffenheit der Tierheit hat", eine konkrete Vorstellung, während die Vorstellung „Tierheit" die zugehörige abstrakte Vorstellung ist. Der Gegensatz konkret und abstrakt ist hier wohl richtig erfaßt, aber die verschiedenen Grade der Abstraktion sind in dieser Definition nicht berücksichtigt. Bolzano sagt selbst, daß seine Erklärung „eine ganz andere ist als diejenige, die man in vielen Lehrbüchern der Logik allein betrachtet findet, die sich auf die E n t s t e h u n g s a r t einer Vorstellung . . . in dem Gemüte bezieht" (S. 261, 1. Anm.). Die rein deduktive Herleitung der beiden Begriffe und ihre symbolische Darstellung verraten den Einfluß der Mathematik.

Die Vorstellungen von Beschaffenheiten finden in der Wissenschaftslehre eingehende Berücksichtigung; ihre Untersuchung ist umso notwendiger, als der größte Teil unserer Kenntnisse die Beschaffenheiten der Dinge betrifft. Bolzano bezeichnet als Beschaffenheit „alles, was einem Gegenstande, sei es fortwährend oder zu irgendeiner auch noch so kurzen Zeit, ja auch nur in einem einzigen Augenblicke z u k o m m t" (S. 379). Wie nun jeder einzelne Gegenstand seine Beschaffenheiten hat, so kommen auch einem Inbegriffe A, B, C, D, . . . als solchem ge-

wisse Beschaffenheiten zu, die man den einzelnen Gegenständen als Teilen des Ganzen nicht beilegen darf. Beschaffenheiten dieser Art nennt Bolzano *Verhältnisse*, „und zwar vornehmlich dann, wenn wir uns sowohl die Gegenstände A, B, C, D, . . . einerseits, als auch die Beschaffenheit x des Ganzen andererseits als *veränderlich* denken, d. h. uns vorstellen, daß andere Gegenstände A', B', C', D', . . . , die nur von der *Art* der A, B, C, D, . . . sind, eine Beschaffenheit haben, die auch nicht einerlei, sondern nur von derselben Art mit x ist" (W. I, S. 381). Das wird an einem Beispiele aus der Geometrie erläutert: Betrachten wir zwei Linien A und B, von denen die eine doppelt so lang ist wie die andere, so ist dieses Doppeltsolangsein eine Beschaffenheit, die weder A noch B allein, sondern nur dem aus A und B bestehenden Ganzen als solchem zugesprochen werden darf. Stellen wir uns statt der betrachteten Linien zwei andere, A' und B', vor, so kommt ihnen — wieder als Ganzes betrachtet — eine ähnliche Beschaffenheit zu, etwa daß die eine Linie dreimal so lang ist wie die andere. In jedem Falle nennen wir die Beschaffenheit, die den beiden Linien gemeinsam zukommt, ein zwischen ihnen bestehendes Verhältnis. In dem gleichen Sinne ist auch z. B. der Umstand, daß Alexander der Große ein Sohn Königs Philipp ist, ein Verhältnis zwischen beiden. Denn es handelt sich hier um eine Beschaffenheit, „die weder dem einen noch dem andern allein, sondern nur ihnen beiden zukommt, und die sich *verändern* würde, wenn wir statt A. und Ph. was immer für andere Personen setzten" (S. 382). Hier tritt die funktionelle Betrachtungsweise, die wir bei Bolzano schon verschiedentlich feststellen konnten, besonders deutlich hervor.

Die Untersuchung der Verhältnisse zwischen einzelnen Vorstellungen oder auch ganzen Inbegriffen von Vorstellungen nimmt in der Bolzanoschen Logik einen breiten Raum ein. Vergleichen wir zwei Vorstellungen hinsichtlich ihrer Weite, so sind drei Fälle möglich:

a) Die Vorstellungen sind *gleich weit*.
b) Die Vorstellungen sind von *ungleicher* Weite.
c) Die Weiten sind beide *unendlich*, lassen daher keinen Vergleich zu.

Gleichweite Vorstellungen sind z. B. „menschlicher Leib" und „menschliche Seele", denn zu jedem menschlichen Leibe gehört eine und nur eine Seele. Von ungleicher Weite sind etwa die

Vorstellungen „menschlicher Finger“ und „menschliche Hand“. Vorstellungen, die sich hinsichtlich ihrer Weite überhaupt nicht vergleichen lassen, sind z. B. „Kugel“ und „Tetraeder“, deren Weiten beide unendlich sind.

Bolzano begnügt sich nicht mit diesen allgemeinen Angaben; er verlangt vielmehr mathematische Genauigkeit. Bei endlichen Weiten wird das Verhältnis zweier Vorstellungen durch die Zahlen bestimmt, welche die Mengen ihrer Gegenstände angeben. So verhalten sich z. B. die beiden Vorstellungen „Söhne Isaaks“ (2) und „Söhne Israels“ (12) hinsichtlich ihrer Weite wie 2 : 12 oder wie 1 : 6 (W. I, S. 438 Anm.). In vielen Fällen läßt sich aber auch das Verhältnis unendlicher Weiten zahlenmäßig ausdrücken. Nimmt man z. B. nur eine endliche Anzahl Kreise an, so sind die beiden Begriffe „Kreislinie“ und „Kreisfläche“ ohne weiteres als gleich weit zu bezeichnen; denn zu jeder Kreislinie gehört eine und nur eine Kreisfläche. An diesem Verhältnisse aber ändert sich nichts, wenn man die Menge der Kreise beliebig vermehrt. „Wir werden also, da sonst kein anderer Umstand vorhanden ist, der uns auf eine Ungleichheit in dem Verhältnisse dieser Weiten schließen läßt, berechtigt sein, sie als vorstellbar durch eine gleiche Größe anzunehmen, auch in dem Falle, wo jene Mengen selbst unendlich sind“ (S. 439, Anm.). Bolzano überträgt hier die Bestimmung des Verhältnisses zweier endlichen Mengen in exakter Weise auf das Unendliche. So ist es z. B. auch möglich, das Verhältnis der beiden Begriffe „Mittelpunkt einer Ellipse“ und „Brennpunkt einer Ellipse“ hinsichtlich ihrer Weite genau anzugeben, obwohl beide Begriffe sich auf unendlich viele Gegenstände beziehen. Die Weiten dieser Begriffe verhalten sich nämlich wie 1 : 2, da es zu jedem Mittelpunkte einer Ellipse immer 2 Brennpunkte gibt. Entsprechend ist das Verhältnis der Weiten von „Kreislinie“ und „Kreisdurchmesser“ mit 1 : ∞ zu bezeichnen. Diese Betrachtungsweise wäre nicht gestattet, wenn man die Weite einer Vorstellung lediglich als die Menge ihrer Gegenstände erklären wollte; denn unendliche Mengen sind als solche ja nicht meßbar. Bolzano hat daher die Weite einer Vorstellung in einer Weise definiert, daß auch das unendlich Große berücksichtigt wird. Die Gegenstände, auf die sich z. B. die Begriffe „Mittelpunkt einer Ellipse“ und „Brennpunkt einer Ellipse“ beziehen, sind zwar an sich unbestimmbar; setzen wir aber die Weite des ersten Begriffes = 1, so müssen wir die Weite des

zweiten Begriffes = 2 setzen, „weil die Menge der Gegenstände, die unter dem letzteren stehen, sich in zwei Teile zerlegen läßt, von denen jeder der Menge der Gegenstände des ersteren Begriffes gleich ist" (W. I, S. 440, Anm.). Hier spielt das Problem der Mächtigkeit hinein, auf das wir früher schon hingewiesen haben.

Die Untersuchungen Bolzanos über die Weitebeziehungen sind rein mathematischer Art. Sie berücksichtigen nicht die verschiedenen Abstraktionsstufen der Begriffe und verlieren daher an Bedeutung. Koordinierte Begriffe haben logisch einen gleichen Umfang, auch wenn die Anzahl der unter sie fallenden Einzelobjekte verschieden groß ist. Nur in dem Falle darf man dem Umfange eines solchen Begriffes eine größere Mächtigkeit beilegen, wenn dieser Begriff mehr Arten unter sich faßt als der andere.

Berücksichtigen wir nunmehr die Gegenstände als solche, auf die sich zwei oder mehrere Vorstellungen beziehen, so sind folgende Fälle möglich: Entweder die Vorstellungen haben einen oder mehrere Gegenstände gemeinsam, oder aber sie haben keinen gemeinsamen Gegenstand; im ersten Falle heißen sie „verträglich", im zweiten „unverträglich" (S. 440). Verträgliche Vorstellungen sind z. B. „etwas Rotes" und „etwas Wohlriechendes"; denn beide beziehen sich auf gewisse gemeinschaftliche Gegenstände, etwa auf eine Rose. Die Vorstellungen „Körper" und „Fläche" dagegen sind unverträglich, weil kein Gegenstand der einen Vorstellung zugleich auch Gegenstand der anderen ist. Charakteristisch für die Untersuchungen der Verträglichkeit und der Unverträglichkeit ist die mengentheoretische Betrachtungsweise, die in allem den Mathematiker verrät. Wir müssen uns im folgenden darauf beschränken, fragmentarisch einige Gedankengänge Bolzanos darzulegen.

Was zunächst das Verhältnis der Verträglichkeit betrifft, so kann der Fall eintreten, daß unter einer gegebenen Menge von Vorstellungen A, B, C, D, ..., nur eine bestimmte Anzahl, etwa je n verträglich sind. Als Beispiel werden 4 Gleichungen 3. Grades angeführt, die je 2 Wurzeln (Lösungen) gemeinsam haben:

$$(x - a)(x - b)(x - c) = 0;$$
$$(x - a)(x - b)(x - d) = 0;$$
$$(x - a)(x - c)(x - d) = 0;$$

$$(x - b)(x - c)(x - d) = 0.$$

Von den 4 Vorstellungen „Wurzeln der 1. Gleichung", „W. d. 2. Gl.", „W. d. 3. Gl.", „W. d. 4. Gl.", die wir der Kürze wegen mit A, B, C, D bezeichnen wollen, sind in der Tat immer je 2 verträglich, wie eine kurze Überlegung zeigt: Die Vorstellung A bezieht sich auf die Gegenstände a, b, c, die Vorstellung B auf die Gegenstände a, b, d, die Vorstellung C auf die Gegenstände a, c, d, und die Vorstellung D auf die Gegenstände b, c, d. Wie wir auch die Vorstellungen A, B, C, D zu je zweien kombinieren, in jedem Falle sind zwei Vorstellungen miteinander verträglich, d. h. sie haben gewisse (im vorliegenden Beispiele zwei) Gegenstände gemeinsam. In der Mathematik werden derartige Überlegungen häufig angestellt.

Beziehen sich 2 Vorstellungen auf dieselben Gegenstände, so spricht Bolzano von einem „wechselseitigen" oder „genauen Umfassen" oder auch von dem Verhältnis der „Gleichgültigkeit" (W. I, S. 445). Sind A und A' zwei solcher Wechselvorstellungen, so läßt sich daraus nicht ohne weiteres schließen, „daß auch ein Paar Vorstellungen, von denen die eine aus A, die andere aus A' auf eine gleiche Weise, d. h. durch Verbindung aus denselben anderen Vorstellungen entsteht, ebenfalls Wechselvorstellungen sein müßten" (S. 448). Das zeigt die Betrachtung der beiden Wechselvorstellungen „2^4" und „4^2", die übrigens bei gleichem Umfange nach der früheren Erklärung auch noch denselben Inhalt haben und doch voneinander verschieden sind. Bilden wir nun aus diesen Wechselbegriffen nach der gleichen Regel die Begriffe „Wurzel der Potenz 2^4" und „Wurzel der Potenz 4^2", so sehen wir, daß diese keine Wechselvorstellungen mehr sind, denn der Gegenstand der einen ist 2, während die andere sich auf die Zahl 4 bezieht.

Ganz modern im Sinne der mathematischen Logik mutet uns folgende Entwicklung an: Bezeichnen wir die Vorstellung eines „Etwas, das (die Beschaffenheiten) a, b, c, d, ... hat", wie es weiter oben bereits geschehen ist, mit [Etwas](a + b + c + d + ...) und die Vorstellung eines „Etwas, das (die Beschaffenheit) x hat", mit X, so sind die Vorstellungen, die durch folgende Symbole dargestellt werden, sämtlich Wechselvorstellungen, sofern sie überhaupt nur Gegenstandsvorstellungen sind:
„[Etwas](a + b), [A]b und [B]a oder allgemein:
[Etwas](a + b + c + ...), [A](b + c + ...), [B](a + c + ...),

[C](a + b + . . .) usw". (W. I, S. 448).

Hieraus ersieht man, wie weit Bolzano bemüht war, seine Gedanken in die exakte Sprache der Mathematik, ja sogar in mathematische Formeln zu bringen. Das Streben, die logischen Gedanken und Gesetze durch besondere Symbole einfacher und eindeutiger auszudrücken, reicht bis auf Aristoteles zurück, der namentlich bei der Darlegung der logischen Verhältnisse des Syllogismus die Wörter durch Buchstabensymbole ersetzt hat.[1]) In der Mathematik, speziell in der Algebra ist der Gebrauch von Symbolen von jeher üblich. Daher nehmen sich die Anhänger der Logistik die Algebra zum Muster, indem sie in gleicher Weise die Logik durch eine Kette symbolischer Ausdrücke wissenschaftlich zu entwickeln suchen. Ohne Zweifel hat auch Bolzano die Bedeutung der Algebra für die Logik erkannt. Wir haben hier einen originellen Versuch einer symbolischen Logik vor uns, dem wir im Verlaufe unserer Untersuchungen noch öfter begegnen werden.

Bolzano dehnt den Begriff der Gleichgültigkeit auch auf ganze Inbegriffe von Vorstellungen aus, wozu ihn lediglich seine Vorliebe für mengentheoretische Untersuchungen veranlaßt. „Der Inbegriff der Vorstellungen A, B, C, D, . . ." heißt „gleichgeltend mit dem Inbegriffe der Vorstellungen M, N, O, . . . , wenn jeder Gegenstand, der unter irgendeiner der Vorstellungen A, B, C, D, . . . steht, auch unter einer der Vorstellung M, N, O. . . . steht, und wieder umgekehrt" (S. 449). Bezeichnend für diese zum Teil rein mathematischen Überlegungen ist, daß Bolzano ganz gegen seine sonstige Gepflogenheit keine praktischen Beispiele mehr anführt, es seien denn solche rein mathematischer Art.

Damit das Verhältnis der Gleichgültigkeit zwischen den Vorstellungen A, B, C, D, . . . einerseits und den Vorstellungen M, N, O, . . . andererseits eintreten kann, ist nicht erforderlich,

---

[1]) Couturat sagt von dem Gebrauche der Symbole in der Logik: „Es ist natürlich und notwendig, daß eine formale Wissenschaft, die vom Inhalte der Begriffe abstrahiert, um deren Verhältnis zueinander schärfer ins Auge zu fassen, sich solcher Formeln bedient, die einen spezifischen Algorithmus ausmachen. Man betritt diesen Weg in dem Augenblick, wo man die die Urteilsglieder vertretenden konkreten Beispiele, deren Inhalt einen irreführenden Einfluß auf den Wert der Form ausüben könnte, durch Buchstaben ersetzt: in diesem Sinne war Aristoteles der erte Logistiker; die Scholastiker haben ihm nachgeahmt, und die Denker der Neuzeit hatten diese primitive Symbolik nur zu entwickeln und zu vollenden" (Die Prinzipien der Logik; Enzyklopädie der philos. Wissensch., I. Bd., Tübingen 1912, S. 138). — Vgl. auch J. Geyser, a. a. O., S. 197 ff.

„daß die Summe der Weiten der Vorstellungen A, B, C, D, . . . gleich ist der Summe der Weiten der Vorstellungen M, N, O, . . .“ (W.I,S.449). Das wird an folgendem Beispiele erwiesen. Die beiden Vorstellungen „Ein Glied der Reihe 1, 2, 3, . . . 10“ und „Ein Glied der Reihe 2, 3, 4, . . . 11“ sind nach der gegebenen Erklärung als Inbegriff gleichgeltend mit den beiden Vorstellungen „Ein Glied der Reihe 1, 2, 3, . . . 5“ und „Ein Glied der Reihe 6, 7, . . . 11“. Die Weite der ersten Vorstellung ist = 10, die der zweiten ist ebenfalls = 10; die Summe beider ist also = 20. Die Weiten der dritten und vierten Vorstellung dagegen betragen zusammen 11, denn die Weite der einen ist = 5, die der anderen = 6.

Daß Bolzano auch die geometrische Darstellung der Umfangsbeziehungen nicht unerwähnt läßt, darf uns bei seiner mathematischen Betrachtungsweise nicht wundern. Um auch hier wenigstens ein Beispiel anzugeben, wählen wir die geometrische Darstellung des Verhältnisses einer „allseitigen Verschlungenheit“ zwischen den Vorstellungen A, B und C, das darin besteht, daß jedes beliebige Paar derselben einige Gegenstände gemeinsam hat.

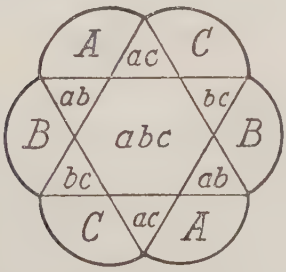

Fig. 1

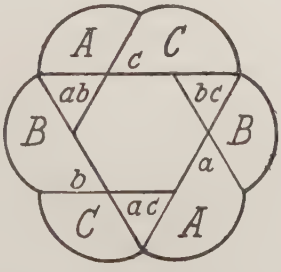

Fig. 2

Aus Figur 1 ist zu ersehen, daß jedes beliebige Paar der allseitig verschlungenen Vorstellungen A, B, C ein bestimmtes Gebiet gemeinsam hat, und zwar jedesmal ein anderes. Gleichzeitig erkennt man, daß die Vorstellung [Etwas] (a + b + c) eine gegenständliche Vorstellung ist, „in der keiner der Teile a, b, c überflüssig ist; indem die Vorstellungen, welche zum Vorschein kommen, sobald wir irgendeinen dieser Teile weglassen, z. B. [Etwas] (b + c), [Etwas] (a + c), . . . alle weiter sind als die Vorstellung [Etwas] (a + b + c)“ (S. 456). Die vorliegende Darstellung hat aber einen Nachteil; die Gebiete der Vorstellungen [Etwas] (a + b), [Etwas] (a + c) und [Etwas] (b + c) werden durch

zwei getrennte Flächen bezeichnet. Das wird in Fig. 2 vermieden. Wir sehen also, daß Bolzano bei seinen logischen Untersuchungen zuweilen Geometrie und Algebra gleichzeitig als Hilfswissenschaften in Betracht zieht.

Auch das Verhältnis der Unverträglichkeit wird eingehend untersucht. Die verschiedenen Arten dieses Verhältnisses werden näher bestimmt und auf Inbegriffe von Vorstellungen ausgedehnt. Schließlich wird noch eine Reihe „mehr oder weniger merkwürdiger Lehrsätze" angeführt (S. 491—499), von denen Bolzano selbst gesteht, daß sie außer einer Übung im Denken kaum einen anderen Nutzen gewähren.

Die Untersuchung der Umfangsbeziehungen führt Bolzano zu weiteren interessanten Betrachtungen. Zunächst wird festgestellt, daß es unendlich viele unbedingt weiteste und höchste Vorstellungen gibt, die aber alle nur Wechselvorstellungen von der Vorstellung eines „Etwas überhaupt" sind. „Es gibt also nur ein Gebiet, welches das unbedingt weiteste ist; aber mehrere Vorstellungen, die sich auf dieses Gebiet beziehen" (S. 459). Die Frage nach den unbedingt engsten Vorstellungen wurde früher schon durch den Nachweis der Individualvorstellungen beantwortet. Jede engste Vorstellung ist aber zugleich auch eine unbedingt niedrigste.

Nachdem so die Grenzen festgestellt sind, zwischen denen sich die Weiten aller übrigen Vorstellungen bewegen, wird untersucht, ob es auch Vorstellungen gibt, die hinsichtlich ihrer Weite oder Höhe unmittelbar aufeinanderfolgen. Diese Frage ist leicht zu beantworten, wenn man sich erinnert, daß es Vorstellungen jeder beliebigen endlichen Menge von Gegenständen gibt. „Denn wenn die Vorstellung X n Gegenstände, die Vorstellung Y aber (n — 1) Gegenstände umfaßt, so folgen X und Y ihrer Weite nach unmittelbar aufeinander; indem es offenbar keine Vorstellung gibt, die, wenn sie enger als X ist, weiter als Y wäre. Sind ferner die (n — 1) Gegenstände der Y zugleich auch Gegenstände der X, so folgen X und Y auch ihrer Höhe nach unmittelbar aufeinander" (S. 465 f.). Es gibt also Vorstellungen, die sich hinsichtlich ihres Umfanges so wenig unterscheiden, daß sie nicht eine einzige Zwischenvorstellung zulassen. Nun erhebt sich die Frage, ob es auch Vorstellungen gibt, zu denen sich unendlich viele Zwischenvorstellungen angeben lassen. Hat die eine der beiden Vorstellungen nur endlich viele

Gegenstände mehr als die andere, so kann es selbstverständlich auch nur eine endliche Anzahl Zwischenvorstellungen geben. An einem Beispiele aus der Geometrie wird nun gezeigt, daß es auch Vorstellungen gibt, die eine unendliche Menge von Zwischenvorstellungen zulassen (W.I.S.467). Zwischen dem Begriffe eines rechten Winkels und dem eines Winkels überhaupt liegt der Begriff eines Winkels, der sich zu seinem Nebenwinkel wie die Zahl 1 zu irgendeiner beliebigen ganzen Zahl n verhält. Denn er ist sicher niedriger als der Begriff eines Winkels überhaupt und höher als der eines rechten Winkels, der ja nur ein Spezialfall des ersteren ist (nämlich für $n = 1$). Berücksichtigen wir, daß eine jede Zahl der Form n^r unter n enthalten ist (aber nicht umgekehrt), so erkennen wir, daß die Begriffe der Winkel, die sich zu ihren Nebenwinkeln verhalten wie $1 : n^2$, $1 : n^4$, $1 : n^5$, ... eine unendliche Folge darstellen, in der jeder Begriff niedriger ist als der vorhergehende, aber alle höher sind als der Begriff eines rechten Winkels, den man nur im Spezialfalle für $n = 1$ erhält. Wir haben hier in der Tat zwei Begriffe mit einer unendlichen Menge von Mittelbegriffen.

Die mathematische Arbeitsweise unseres Logikers tritt noch deutlicher in folgenden Untersuchungen zutage: Um die Weite einer Vorstellung zu messen, deren Gebiet endlich viele Gegenstände umfaßt, müssen wir der Messung als Einheit eine Vorstellung zugrunde legen, die sich ebenfalls auf eine endliche Menge von Gegenständen bezieht, und zwar „am natürlichsten" die Weite einer Einzelvorstellung. Schwieriger gestaltet sich die Messung der Weite solcher Vorstellungen, die sich auf unendlich viele Gegenstände beziehen. Hier muß man als Einheit die Weite einer Vorstellung nehmen, die ebenfalls unendlich viele Gegenstände umfaßt. Diese Einheit genügt aber durchaus nicht zur Messung aller Vorstellungen dieser Art: es zeigt sich vielmehr, „daß es der Vorstellungen unendliche viele gibt, die so beschaffen sind, daß die eine derselben durch eine andere an Weite immer unendliche Male übertroffen wird. Ein Umstand, aus welchem folgt, daß das Maß, welches zur Messung der einen dient, zur Messung der anderen nicht angewandt werden kann, und daß mithin keine endliche Menge von Maßen genügt, um die Weiten aller Vorstellungen zu messen" (S. 473). Diese Behauptung wird durch rein mathematische Überlegungen bewiesen:

Bezeichnet n jede beliebige ganze Zahl, so stellen die Zahlen

n, n^2, n^4, n^8, n^{16}, n^{32}, . . . Begriffe dar, die sich auf unendlich viele Gegenstände beziehen, und zwar ist jeder Gegenstand eines jeden dieser unendlich vielen Begriffe (von n^2 ab) auch Gegenstand des vorhergehenden Begriffes. Umgekehrt aber kann man nicht sagen, daß jeder Gegenstand eines dieser Begriffe auch Gegenstand des folgenden ist. Daher ist von den Begriffen n, n^2, n^4, n^8, n^{16}, n^{32}, . . . jeder folgende dem vorhergehenden untergeordnet. Es zeigt sich ferner, daß die Weite jedes Begriffes die Weite jedes nachfolgenden u n e n d l i c h m a l übertrifft. Bezeichnen wir nämlich die größte zulässige Zahl mit N, so ist auch die größte Zahl, die z. B. durch n^{16} dargestellt werden kann, höchstens gleich N. Die Anzahl der Gegenstände des Begriffes n^{16} ist dann höchstens gleich $N^{1/16}$. Entsprechend ist die Anzahl der Gegenstände des vorhergehenden Begriffes n^8 höchstens gleich $N^{1/8}$. Die Weiten der Begriffe n^8 und n^{16} verhalten sich also wie $N^{1/8} : N^{1/16}$ oder wie $N^{1/16} : 1$. Da aber N beliebig groß angenommen werden darf, so kann auch $N^{1/16}$ größer als jede angebbare Größe werden. Dem wahren Werte des betrachteten Verhältnisses kommt man immer näher, je größer man N annimmt. Daraus folgt, „daß die Weite des Begriffes n^8 jene des Begriffes n^{16} unendliche Male übertrifft“ (W. I, S. 474). Die Reihe n, n^2, n^4, n^8, n^{16}, n^{32} läßt sich unbeschränkt fortsetzen; sie stellt demnach eine unendliche Reihe von Begriffen dar, von denen jeder unendlich mal weiter ist als der nächstfolgende.

Daraus schließt Bolzano richtig: Eine geometrische Veranschaulichung der Umfangsbeziehungen zwischen Vorstellungen ist streng mathematisch nicht möglich. „Um dieses leisten zu können, müßte es nämlich auch im Raume eine unendliche Reihe von Größen geben, deren eine die andere immer unendliche Male übertrifft. Dergleichen sind hier aber bekanntlich nicht zu finden“ (ebd.). Noch weniger läßt sich der Fall veranschaulichen, daß zwei Vorstellungen in ihrem Gebiete einander so nahe kommen, daß sie keine Zwischenvorstellung zulassen. Wir müssen uns daher bei all diesen Verhältnissen mit einer „beiläufigen“ Darstellung begnügen.

6. Die Variation der Vorstellungen.

Es wurde früher gezeigt, daß Bolzano mit Unrecht die Richtigkeit des Satzes vom umgekehrten Verhältnis der Begriffsseiten bestreitet. Er führt bei seiner Argumentation u. a. die überfüllten Vorstellungen an, auf die sich die Gültigkeit des Kanons allerdings nicht erstreckt. Es mag dahingestellt bleiben, ob die Annahme überfüllter Vorstellungen logisch berechtigt ist, Bolzano hat sich jedenfalls eingehend mit ihnen auseinandergesetzt. Eine Vorstellung heißt überfüllt, wenn sie „mehr Teile in sich vereinigt, als zur Vorstellung der Gegenstände, welche die Vorstellung darstellt, notwendig sind" (W. I, S. 309). So ist z. B. die Vorstellung „Ein Viereck, dessen gegenüberliegende Seiten gleichlaufend und gleichlang sind" hinsichtlich des Bestandteiles „gleichlang" überfüllt. Denn aus der Parallelität der Seiten folgt ja schon, daß sie auch gleichlang sind.

Der Begriff der Überfüllung bezieht sich zunächst nur auf Vorstellungen, die tatsächlich einen Gegenstand haben, nicht aber auf gegenstandlose Vorstellungen. Hier führt nun Bolzano eine neue Methode ein, die Variation der Vorstellungen, die es ermöglicht, den Begriff der Überfüllung auch auf gegenstandlose Vorstellungen auszudehnen. „Auch eine Vorstellung, die ... gegenstandslos ist, nennen wir überfüllt, und zwar in den Teilen α, β, γ, ..., wiefern wir gewisse andere Teile i, j, ... in ihr als veränderlich ansehen und gewahren, daß — so oft wir diese Teile mit beliebigen andern auf die Art vertauschen, daß eine gegenständliche Vorstellung hervorgeht —, diese in den Teilen α, β, γ, ... überfüllt ist" (S. 311). So heißt z. B. die Vorstellung „ein rundes und dabei doch eckiges Viereck" hinsichtlich des Bestandteiles „eckig" überfüllt, wenn wir „rund" als variabel annehmen. „Denn so oft wir an die Stelle des letzteren etwas von der Art setzen, daß die ganze Vorstellung, die so zum Vorscheine kommt, eine gegenständliche wird (man ersetze z. B. den Bestandteil „rund" durch „gezeichnet" D. V.), so ist es eine Vorstellung, die ... überfüllt ist, d. h. die ihren

Umfang nicht ändert, wenn wir die Worte: und dabei eckig, weglassen" (W. I, S. 311). Um eine eigentliche Veränderung der Vorstellung an sich handelt es sich hier natürlich nicht; denn Vorstellungen an sich haben nach der gegebenen Erklärung keine Existenz und sind als solche auch keiner Veränderung unterworfen.

Die im vorigen Abschnitte erwähnten Verhältnisse beziehen sich lediglich auf Gegenstandsvorstellungen. Ohne Zweifel aber werden einige dieser Beziehungen sogar im gewöhnlichen Sprachgebrauche auch auf Vorstellungen angewandt, denen in Wirklichkeit kein Gegenstand entspricht. So können z. B. die beiden Vorstellungen „Ein Berg, der golden ist" und „Gold, das einen Berg bildet" als gleichgeltend bezeichnet werden. In der Mathematik nennt man den Begriff eines Körpers, der von 5 gleichen Seitenflächen begrenzt wird, und den eines Körpers, der von 7 gleichen Seitenflächen begrenzt wird, einander ausschließende Begriffe, obgleich man weiß, daß es solche Gebilde überhaupt nicht gibt. Zuweilen spricht man bei gegenstandlosen Vorstellungen auch von dem Verhältnis der Unterordnung, allerdings in einer gewissen erweiterten Bedeutung. Man sagt z. B., dem Begriffe eines „Wesens, an dem sich nicht eine einzige gute Beschaffenheit befindet" sei der Begriff eines „Menschen, an dem sich nicht eine einzige gute Beschaffenheit befindet", untergeordnet. Es werden also Aussagen über den Umfang der betreffenden Vorstellungen gemacht, die gewiß zuträfen, wenn die vorgestellten Gegenstände existierten. Die Methode der Variation ermöglicht nun ganz allgemein eine Erweiterung der Umfangsbeziehungen auf gegenstandlose Vorstellungen. Dabei „ist nur nötig, daß wir unser Augenmerk auf die unendlich vielen neuen Vorstellungen richten, welche aus den gegebenen hervorgehen, wenn an die Stelle der veränderlichen Teile i, j, . . . was immer für andere Vorstellungen treten. Welches Verhältnis nun diese neuen Vorstellungen, so oft sie gegenständlich sind, gegeneinander beobachten, dasselbe legen wir auch den gegebenen gegenstandslosen Vorstellungen bei; es versteht sich, nur bedingnisweise, sofern es gerade die Teile i, j. . . . sind, die als veränderlich gelten" (S. 514). In diesem Sinne heißen z. B. die oben erwähnten gegenstandlosen Vorstellungen „Ein Berg der golden ist" und „Gold, das ein Berg ist" Wechselvorstellungen, und zwar hinsichtlich der veränderlichen Teile „Berg" und „Gold". Denn alle Vorstellungen, die wir durch

Variation dieser Bestandteile erhalten, sind jedesmal dann äquipollent, wenn sie nur gegenständlich sind.

Bolzano hat das Prinzip der Variation der Mathematik entnommen. Den wichtigsten Gebrauch von dieser Methode, sagt er in einer Anmerkung, mache der Mathematiker, namentlich in der Lehre von den Gleichungen. „Diese sind nämlich ihrem ursprünglichen Begriffe nach nichts anderes als Aussagen der Gleichgültigkeit zweier Vorstellungen. Sagen, daß $4 + 5 = 11 - 2$ sei, heißt nur sagen, daß die Vorstellung $4 + 5$ dieselben Gegenstände habe wie die Vorstellung $11 - 2$. Bliebe man aber bei diesem Begriffe stehen, dann dürfte man nie Gleichungen wie $2 - 2 = 0, \frac{1}{\sqrt{-1}} = -\sqrt{-1}$ u. a. ähnliche aufstellen[1]), deren Bedeutung sich nach dem Gesagten leicht erkläret" (W. I, S. 515, Anm.).

Die Variationsmethode hat in der Mathematik ohne Zweifel ihre volle Berechtigung. Nicht so leicht aber ist die Beantwortung der Frage, ob sie sich auch bei logischen Untersuchungen als brauchbar erweist. Zur Ermittlung des Umfangsverhältnisses zweier gegenstandloser Vorstellungen, etwa eines „Berges, der ganz aus Gold besteht" und eines „Berges, der ganz aus Metall besteht", variiert Bolzano den Grundbestandteil „Berg" und erhält so z. B. durch Einsetzen der Vorstellung „Münze" die beiden gegenständlichen Vorstellungen „goldene Münze" und „metallene Münze", von denen die zweite offenbar weiter ist als die erste. Dieses Umfangsverhältnis wird dann auch den zuerst betrachteten gegenstandlosen Vorstellungen zugelegt. Bergmann meint, dieses Resultat sei einfacher zu erzielen durch Beantwortung der Frage, welcher von den beiden Begriffen einen größeren Umfang hätte, wenn sie gegenständlich wären.[2]) Ohne Zweifel würden dann die goldenen Berge nur einen Teil der metallenen Berge ausmachen, wodurch das Resultat auf einfache Weise klar würde. Während diese Überlegung in jedem Falle auch ein eindeutiges Ergebnis liefert, gestattet die Variationsmethode je nach Wahl der veränderlichen Bestandteile verschiedene Resultate. Die Variationsmethode muß daher eine Einschränkung in der Hinsicht erfahren, daß die Wahl der veränderlichen Teile durchaus nicht beliebig ist, wie Bolzano meint.

---

[1]) Bolzano erklärt die Vorstellungen „Null" und „$\sqrt{-1}$" ausdrücklich als gegenstandlos (Vgl. W. I, S. 220 und S. 304 f.).

[2]) H. Bergmann, a. a. O., S. 69 f.

Es dürfen nur solche Teile verändert werden, die den betrachteten Vorstellungen gemeinsam sind. Nur in diesem Falle ist eine gleichsinnige Vergleichung überhaupt möglich. In den Vorstellungen „goldener Berg“ und „metallener Berg“ darf demnach nur der Bestandteil „Berg“ variiert werden, nicht aber die in beiden Vorstellungen verschiedenen Bestandteile „golden“ und „metallen“. Daraus folgt, daß nur solche Vorstellungen ververglichen werden können, die gemeinsame Bestandteile haben; auf alle übrigen läßt sich die Variationsmethode nicht anwenden.

Die späteren Logiker haben diese Methode nicht aufgegriffen, vielleicht aus Unkenntnis der Bolzanoschen Untersuchungen. Wohl finden sich in der modernen Logistik gewisse Anklänge an die Variationsmethode, auf die wir im nächsten Abschnitte noch zurückkommen. Die engen Beziehungen zwischen Logistik und Mathematik sprechen dafür, daß solche rein mathematischen Methoden sich in dieser extremen Form der formalen Logik bewähren werden.

III. Abschnitt.

Die Lehre von den Sätzen und Wahrheiten an sich.

1. Die einheitliche Grundform aller Sätze an sich.

Charakteristisch für die Lehre von den Sätzen an sich ist das Streben Bolzanos nach Vereinheitlichung. Schon in den „Beiträgen" (1810) hat er versucht, die Sätze in einfache Formen zu kleiden. In dem Abschnitte „Über die mathematische Methode" werden 5 verschiedene Urteilsformen aufgezählt.[1]) Bolzano hat diese Einteilung, die lediglich auf der Art der Beziehung zwischen Subjekt und Prädikat beruht, nicht beibehalten. In seiner Wissenschaftslehre (1837) finden wir ihn bemüht, alle Sätze auf eine einheitliche Grundform zurückzuführen. „In allen Sätzen", so heißt es dort, „befindet sich der Begriff des Habens oder bestimmter noch der Begriff, den das Wort ‚hat' bezeichnet. Nebst diesem einen Bestandteile kommen in allen Sätzen noch zwei andere vor, die jenes ‚hat' miteinander auf eine Weise verbindet, wie in dem Ausdrucke: A hat b angezeigt wird" (W. II. S. 9). Bolzano gibt sich alle erdenkliche Mühe, diese Auffassung zu rechtfertigen. Jedes bestimmte Zeitwort, so argumentiert er, könne ohne wesentliche Änderung der Bedeutung durch das entsprechende Partizip in Verbindung mit dem Worte „ist" ersetzt werden. „A tut" sei durchaus gleichgeltend mit „A ist tuend". Ein solcher Satz habe also die Form „A ist B", die gleichbedeutend sei mit „A hat b", worin b das zu dem Konkretum B gehörige Abstraktum darstelle. Der Satz „Gott ist allwissend" habe die Grundform „Gott hat Allwissenheit". Auch ein Existenzialsatz von der Form „A ist" habe keinen anderen Sinn als „A hat Dasein". Unbedenklich folgert Bolzano hieraus, daß jedem

[1]) S ist eine Art von P: Notwendigkeitsurteile; A kann sein eine Art von B: Möglichkeitsurteile; N soll tun X: Praktische Urteile; Ich nehme wahr X: Wahrnehmungsurteile; Wahrscheinlichkeitsurteile.

Satze die Form „A hat b" zugrunde liege. Dieser fundamentale Irrtum ist auf den überragenden Einfluß der Mathematik zurückzuführen, der auch in der Lehre von den „Sätzen an sich" immer wieder zu erkennen ist. Ohne Zweifel tritt die Struktur eines Urteils in dem Symbol „A hat b" klarer und einfacher hervor als in dem wörtlichen Ausdrucke, der zudem ständig wechselt; keinesfalls aber lassen sich alle Sätze in diese Formel hineinzwängen.

Durch die Annahme einer einheitlichen Grundform, die bejahend und kategorisch ist, verwickelt sich Bolzano in Schwierigkeiten, die ihn den wahren Sachverhalt zuweilen ganz verkennen lassen. So ist er z. B. der Ansicht, der Begriff der Verneinung, wie innig ihn auch die Sprache mit dem Zeitworte verbinde, sei kein Bestandteil der Kopula sondern der Prädikatvorstellung. Der Satz „A — non habet — b" habe eigentlich den Sinn „A — habet — defectum τοῦ b" (W. II, S. 16). Die negativen Urteile sind also nach Bolzano nur scheinbar negativ. Dem Subjekt wird ein verneinendes Prädikat zugesprochen. Demgegenüber müssen wir feststellen, daß die Verneinung sich stets und ausschließlich auf die Kopula bezieht, nicht aber auf den Subjekt- oder Prädikatbegriff. So wird z. B. das Urteil „Rot ist nicht-weiß" durch den negativen Prädikatbegriff nicht etwa auch negativ, es ist positiv und formal verschieden von dem negativen Urteile „Rot ist nicht weiß", auch wenn beide denselben Tatbestand ausdrücken. Wenn Bolzano die negativen Urteile in die allgemeine Form kleidet: „A hat Mangel an b", so übersieht er dabei auch, daß der Begriff Mangel überhaupt erst durch Reflexion auf verneinende Urteile gewonnen werden kann.[1]) Derartige logische Feinheiten und Unterschiede gehen unserem mathematisch betrachtenden Logiker völlig verloren.

Bolzano verlangt auch, daß die Subjektvorstellung in allen wahren Sätzen eine eigentliche Gegenstandsvorstellung sei. Demnach wäre manche Satzbildung, wie z. B. „Ein dreieckiger Kreis ist unmöglich", nicht gestattet. Der mathematisch kombinierende Geist Bolzanos findet sich aber aus dieser Schwierigkeit heraus. Er nimmt hier nicht die Vorstellung eines dreieckigen Kreises zur Subjektvorstellung, sondern die „Vorstellung von der Vorstellung eines dreieckigen Kreises", der dann Gegenständlichkeit zukomme.

[1]) Vgl. dazu H. Bergmann, a. a. O., S. 53 f; Jerusalem, Die Urteilsfunktion, Leipzig 1895 und Ziehen, a. a. O., S. 390.

Solche Vorstellungen werden „symbolische" Vorstellungen genannt (W. I. S. 426 f.). Hier liegt wieder ein grundlegender Irrtum Bolzanos vor, der ihm bei gewissen Untersuchungen, auf die wir noch zurückkommen, erhebliche Schwierigkeiten bereitet.

Jeder Satz ist nach der gegebenen Erklärung ein zusammengesetztes Gebilde. Die „Summe aller seiner näheren oder entfernteren Teile" bezeichnet Bolzano als Inhalt des Satzes (W. II. S. 5). So besteht z. B. der Satz „Gott hat Allwissenheit" aus den drei Vorstellungen „Gott", „hat" und „Allwissenheit". Die letzte Vorstellung aber ist selbst wieder zusammengesetzt, enthält also noch gewisse Bestandteile, die als entferntere Teile des Satzes ebenfalls zu seinem Inhalte gehören.[1]) Die Bolzanosche Erklärung des Inhaltes eines Satzes deckt sich durchaus nicht mit dem, was gewöhnlich als Urteilsmaterie bezeichnet wird. Während Bolzano nämlich alle Bestandteile, die in einem Satze vorkommen, zu seinem Inhalte zählt, rechnet man zur Materie eines Urteils lediglich den Subjekt- und Prädikatbegriff, aber nicht als solche, sondern nur als logische Dinge, die mit Rücksicht auf die künftige oder vorausgegangene Urteilsform die Voraussetzungen des Urteils sind.[2]) Es bedarf keiner besonderen Ausführung, daß der Begriff des Inhaltes eines Satzes in der Bolzanoschen Fassung logisch wertlos ist. Diese Definition verrät eine gewisse Vorliebe für das mathematische Zerlegen und Zusammenfassen. Das geht auch aus folgendem hervor. Wir haben früher bei den Vorstellungen gehört, daß Bolzano die Möglichkeit ihrer unendlichen Zusammensetzbarkeit erörtert, indem jede Vorstellung sich als Bestandteil einer anderen ansehen lasse. Diese Überlegungen werden analog auch auf die Sätze übertragen: „Jeden beliebigen Satz A können wir nämlich mit jedem beliebigen anderen B zu einem Inbegriff verknüpfen, und indem wir uns diesen Inbegriff denken, haben wir eine Vorstellung; und wenn wir etwas von diesem Inbegriffe aussagen, z. B. daß es ein Inbegriff sei, haben wir einen Satz, in welchem A als ein Bestandteil vorkommt" (S. 6 f.).

[1]) Während einem Satze stets ein bestimmter Inhalt zukommt, spricht Bolzano bei den Vorstellungen nur dann von einem Inhalte, wenn sie zusammengesetzt sind. „Der Begriff des Inhaltes müßte bei Vorstellungen etwas erweitert werden, wenn man von einer jeden, auch der einfachen Vorstellung sollte sagen können, daß sie nicht inhaltsleer sei" (W. II, S. 5). — Vgl. auch S. 38 dieser Arbeit.

[2]) Vgl. Dyroff-Hagemann, Logik und Noetik, S. 60.

In den meisten Fällen enthält der Inhalt eines Satzes mehr als drei Bestandteile. Nur wenn der Subjekt- und Prädikatbegriff durchaus einfach sind, besteht der Inhalt bloß aus drei Teilen. Sätze dieser Art nennt Bolzano einfach, die anderen dagegen zusammengesetzt. Ohne Zweifel sind die einfachen Sätze „in mancher Hinsicht von einer eigenen Merkwürdigkeit": Bolzano selbst aber ist nicht in der Lage, auch nur einen solchen Satz anzugeben (W. II, S. 29).

Ein Satz hat nun auch einen gewissen Umfang (Gebiet), d. h. eine Beschaffenheit, „vermöge deren es eben geschieht, daß er gerade von diesen und nicht von andern Gegenständen handelt", und zwar ist der Umfang eines Satzes immer identisch mit dem Umfange seiner Subjektvorstellung (S. 24 f.). Um das Gebiet eines Satzes daher vollständig zu bestimmen, müssen wir entsprechend der früheren Erklärung des Umfangs angeben, wie viele und welche Gegenstände es sind, von denen der Satz handelt. Die Untersuchung der Größe des Umfanges eines Satzes führt uns wieder zu dem Begriffe der Weite. Was früher über die Ermittlung der Weite einer Vorstellung und ihre zahlenmäßige und geometrische Darstellung gesagt wurde, das gilt analog auch für die Bestimmung der Weite eines Satzes.

2. Die Einteilung der Sätze an sich.

Die einheitliche Form, die Bolzano allen Sätzen zugrunde legt, gestattet keine Unterschiede des objektiven Urteilsmodus; Subjekt und Prädikat sind immer in derselben Weise verknüpft. Infolgedessen sind alle Unterschiede der Urteile nur materialer Art, sie stützen sich lediglich auf Differenzen des beurteilten Objekts. Die Bolzanosche Einteilung der Sätze hat daher keine besondere logische Bedeutung; sie beruht im wesentlichen auf einer Unterscheidung der Vorstellungen bzw. der Gegenstände.[1])

[1]) Die Bolzanosche Einteilung berücksichtigt folgende Arten: 1) Einfache und zusammengesetzte Sätze; 2) Begriffs- und Anschauungssätze; 3) Abstrakte und konkrete Sätze; 4) Sätze mit Inbegriffsvorstellungen; 5) Sätze mit verneinenden Vorstellungen; 6) Aussagen und Verneinungen der Gegenständlichkeit einer Vorstellung; 7) Sätze, die den Umfang einer Vorstellung näher bestimmen; 8) Sätze über Verhältnisse zwischen Vorstellungen; 9) Aussagen von anderen Sätzen; 10) Daseinssätze; 11) Sätze, die eine psychische Erscheinung aussagen; 12) Sittlichkeitssätze; 13) Fragesätze; 14) Gegenstandslose und gegenständliche Sätze. Vgl. dazu Bergmann, a. a. O., S. 63 f.

Die Untersuchung der verschiedenen Arten von Sätzen an sich, von denen hier zwei berücksichtigt werden sollen, scheint in erster Linie den Nachweis zu bezwecken, daß alle Sätze sich auf die Grundform „A hat b" zurückführen lassen.

Bolzanos Vorliebe für mengentheoretische Untersuchungen haben wir früher schon festgestellt. Es kann uns daher nicht wundern, daß er besonders die „Sätze mit Inbegriffsvorstellungen" eingehend untersucht. Diese Sätze sind ihm „merkwürdig genug . . . . um den Wunsch zu erzeugen, daß eigene Kunstworte zu ihrer Bezeichnung eingeführt werden" (W. II, S. 39). So spricht er z. B. von einem „Vielheitssatze", wenn die Subjektvorstellung eine Mehrheit oder Vielheit enthält. Als Beispiel wird der Satz angeführt: „Ein Inbegriff von Materie hat keine Vorstellungen." Bezieht sich die Subjektvorstellung eines Satzes auf ein Ganzes oder eine Allheit, so heißt er ein „Satz über Ganze" oder ein „Allheitssatz", z. B. „Alle endlichen Wesen zusammengenommen vermögen nichts wider Gott". Ebenso werden für die Sätze, in denen die Inbegriffsvorstellung als Prädikat erscheint, besondere Bezeichnungen eingeführt. Zu den Inbegriffssätzen gehören auch alle Sätze, in denen wir aussagen, daß die Menge der Gegenstände A, B, C, D, . . . eine gemeinschaftliche Beschaffenheit m hat. Diese Sätze werden „Vergleichungen" oder „Gleichsetzungen" genannt. Kommt die Beschaffenheit m den Elementen einer Menge A, B, C, D, . . . gemeinsam zu, während sie den Elementen einer anderen Menge F, G, H, . . . mangelt, so läßt sich ein „Unterscheidungssatz" bilden, den Bolzano in die allgemeine Form kleidet: „Das Verhältnis der A, B, C, D, . . . zu den F, G, H, . . . ist ein Verhältnis von Dingen, welche m haben, zu andern, denen m mangelt" (S. 42). Diese Beispiele zeigen zur Genüge, daß der Mengenbegriff auch in der Lehre von den Sätzen eine Rolle spielt. Wesentlich Neues ergeben diese Untersuchungen Bolzanos nicht, sie kennzeichnen nur seine mathematische Betrachtungsweise.

Durchaus beachtenswert ist die Einteilung der Sätze an sich nach ihrer Gültigkeit. Dieser Begriff stützt sich auf die Variation der Vorstellungen, die wir im vorigen Abschnitte kennengelernt haben. Jeder Satz ist entweder wahr oder falsch, wobei dieses Verhalten zur Wahrheit unabhängig von Ort und Zeit ist. Wohl sagt man z. B., der Satz: „Ein Eimer Wein kostet 10 Taler", sei an einem bestimmten Orte und zu einer bestimmten

Zeit wahr, für einen anderen Ort und eine andere Zeit gelte er nicht; in Wirklichkeit aber ist es gar nicht derselbe Satz, der sein Verhalten zur Wahrheit ändert; wir haben es vielmehr mit ganz verschiedenen Sätzen zu tun, die alle aus dem ursprünglichen Satze dadurch hervorgehen, daß wir in ihm die Angaben des Ortes und der Zeit verändern. Zuweilen ist es zweckmäßig, gewisse Bestandteile eines Satzes bewußt zu variieren und das Verhalten dieses Satzes zur Wahrheit zu beobachten. Betrachten wir z. B. alle Sätze, die sich aus dem Satze „Der Mensch Cajus ist sterblich" entwickeln lassen, indem wir die Vorstellung „Cajus" als veränderlich annehmen und mit beliebigen anderen Vorstellungen, z. B. Sempronius, Titus, Rose, Dreieck usw., vertauschen, so zeigt sich, daß jeder entstehende Satz wahr ist, so oft die neue Subjektvorstellung eine Gegenstandsvorstellung ist. Ersetzen wir nämlich die Vorstellung „Cajus" nur durch solche Vorstellungen, die sich auf Menschen beziehen, so entsteht immer ein wahrer Satz. Vertauschen wir aber die veränderliche Vorstellung „Cajus" etwa mit der Vorstellung „Dreieck", so bekommen wir einen falschen Satz. Die Frage nach der Anzahl der wahren Sätze führt uns zu dem Begriffe der Gültigkeit. „Wieviel ein Satz g e l t e . . . , soll also ebensoviel heißen, als wie sich die Menge der wahren Sätze, die sich aus ihm entwickeln lassen . . . , zur Menge aller verhalte. Der Grad dieser Gültigkeit wird sich durch einen Bruch darstellen lassen, dessen Zähler sich zu dem Nenner wie die erste Menge zur letzten verhält" (W. II, S. 81). Damit sich der Gültigkeitsgrad in jedem Falle zahlenmäßig bestimmen läßt, muß die Variation der Vorstellungen eine Beschränkung erfahren. Es wird festgesetzt, daß keine äquipollente Vorstellungen eingeführt werden dürfen (S. 79 f.). Im übrigen werden nur solche Vorstellungen zugelassen, durch die der veränderte Satz nicht sinnlos wird. Zur Erläuterung führt Bolzano folgendes Beispiel an: Wir stellen uns eine Urne mit 90 Kugeln vor, die von 1 ab fortlaufend numeriert sind, und bilden den Satz: „Unter den Kugeln, die ich jetzt aus der Urne nehme, befindet sich die Kugel Nr. 8". Sehen wir in diesem Satze die Vorstellung „8" als veränderlich an, so lassen sich im ganzen 90 solcher Sätze aufstellen; denn nach der oben festgesetzten Einschränkung darf die Zahl 8 nur durch Zahlen von 1 bis 90 ersetzt werden. Nimmt man nun 5 Kugeln aus der Urne, so sind von den 90 möglichen Sätzen 5 wahr. Der Gültigkeits-

grad des angeführten Satzes ist also in diesem Falle $^5/_{90} = {}^1/_{18}$. Es sei schon hier bemerkt, daß dieses Verhältnis auch den Grad der Wahrscheinlichkeit bestimmt, den der Satz unter den erwähnten Bedingungen annimmt. Näheres hierüber später! Das Beispiel zeigt, daß die Gültigkeit eines Satzes wesentlich von der Wahl der Veränderlichen abhängt. „Um also den Grad der Gültigkeit eines Satzes gehörig beurteilen zu können, muß man jederzeit angeben, welche Vorstellungen in ihm als veränderlich betrachtet werden sollen" (W. II, S. 82). Der Gültigkeitsgrad wird im allgemeinen durch einen echten Bruch dargestellt. Im Grenzfalle kann er auch den Wert 1 oder 0 annehmen. Ein Satz hat hinsichtlich der Vorstellungen i, j, . . . den Gültigkeitsgrad 1, wenn alle Sätze, die sich durch Variation dieser Vorstellungen aus ihm entwickeln lassen, wahr sind. In diesem Falle heißt der Satz „allgemein- oder vollgültig". Ist der Gültigkeitsgrad eines Satzes 0, d. h. sind die aus ihm sich entwickelnden Sätze alle falsch, so spricht man von einem „allgemein- oder durchaus ungültigen" Satze.

Wir haben früher schon auf die Ähnlichkeit gewisser Beziehungen der Logistik mit der Variationsmethode Bolzanos hingewiesen. In den Untersuchungen Russells und Couturats findet sich der Begriff der „propositional function", von Hausdorff mit Urteilsschema übersetzt. Unter einem Urteilsschema verstehen die Logistiker eine logische Funktion φx, die für jede Bedeutung der Veränderlichen x ein Urteil wird.[1]) Dazu ist zu bemerken, daß der logische Funktionsbegriff weiter ist als der mathematische. So ist z. B. der Ausdruck „$\sin x = 1$" in der Mathematik keine Funktion mehr, sondern nur eine Gleichung, während die Logik ihn noch als Funktion bezeichnet. Ein Urteilsschema ist z. B. die Beziehung „x ist ein Mensch". Daraus ersieht man, daß ein Urteilsschema noch nicht ohne weiteres den Namen eines Urteils verdient; denn es ist weder wahr noch falsch, sondern unbestimmt. Zu einem wahren oder falschen Urteile wird dieses Schema erst, wenn die Veränderliche x durch Einsetzen eines bestimmten Wertes eine Bedeutung erhält. Die Menge der Werte von x, für die das Urteilsschema φx gilt, d. h. ein wahres Urteil wird, heißt eine „Klasse". Die Logistik bezeichnet eine solche Klasse durch das Symbol $x \in \varphi x$. Auf eine nähere Unter-

[1]) Couturat, a. a. O., S. 17 f.

suchung des Klassenkalküls kann hier natürlich nicht eingegangen werden; das würde zu weit führen. Wichtig für unsere Untersuchungen ist aber die Feststellung, daß die Definition der „Klasse" mit dem Bolzanoschen Begriff der Gültigkeit eines Satzes im wesentlichen übereinstimmt. Wir sehen also, daß Bolzano in der Tat eine mathematische Logik nicht nur angestrebt, sondern in manchen Stücken schon ausgebildet hat. Wenn es der modernen Logistik gelungen ist, eine Verbindung von Logik und Mathematik herbeizuführen, so ist das nicht ausschließlich das Verdienst einer der beiden Wissenschaften. Die fortschreitende Vereinigung ist vielmehr erst ermöglicht worden durch die Arbeiten von Boole, Schröder und Peirce auf der einen und von Weierstraß, Cantor und Peano auf der anderen Seite. Von diesen aber ist Cantor ohne Zweifel von Bolzano beeinflußt, der ihm in der Mengenlehre bedeutend vorgearbeitet hat. Cantor selbst hat das in seinen „Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre" anerkannt.

Indirekt ist auch Bolzanos Lehre von den analytischen und synthetischen Urteilen mathematisch beeinflußt. Die Untersuchung der Gültigkeit eines Satzes hat gezeigt, daß es durchaus nicht gleichgültig ist, welche Vorstellungen variiert werden. Dürfte man alle Bestandteile eines Satzes willkürlich abändern, so könnte man den Satz in jeden beliebigen andern (wahren oder falschen) Satz verwandeln. Sätze, deren „Wahrheit oder Falschheit nicht von den einzelnen Vorstellungen, aus denen sie bestehen, abhängt, sondern dieselbe verbleibt, was für Veränderungen man auch mit einigen derselben vornimmt, vorausgesetzt, daß man nur nicht die Gegenständlichkeit des Satzes selbst zerstört", nennt Bolzano analytisch (WII, S 88, 4. Anm.). Im Gegensatze dazu werden als synthetisch die Sätze bezeichnet, „bei denen es nicht eine einzige Vorstellung gibt, die sich ihrer Wahr- oder Falschheit unbeschadet willkürlich abändern ließe" (S.83). So ist z. B. der Satz: „Ein Mensch, der sittlich böse ist, verdient keine Achtung", analytisch zu nennen; denn in diesem Satze gibt es eine Vorstellung („Mensch"), die man beliebig variieren kann (durch Einsetzen von „Engel", „Wesen" usw.), wobei jeder neu entstehende Satz wahr bleibt, sofern er durch diese Veränderung nicht sinnlos wird. Allgemeine Beispiele für analytische Sätze sind nach Bolrano u. a.: „A ist A", „A, welches B ist, ist A", denen in Bezug auf die Vorstellung A allgemeine Gültigkeit zukommt.

Ebenso ist der Satz „A ist non-A" analytisch und zwar falsch, weil in ihm die Vorstellung A beliebig variiert werden kann, ohne daß der Satz dadurch wahr wird. Die Sätze: „Gott ist allwissend" und „Ein Dreieck hat 2 rechte Winkel", werden als synthetisch bezeichnet; es läßt sich in ihnen keine Vorstellung nachweisen, die willkürlich abgeändert werden kann, wobei der erste Satz beständig wahr, der zweite falsch bliebe.

Bolzano wendet sich entschieden gegen die Logiker (besonders Beneke, Krug und Maaß), denen der Unterschied der analytischen und synthetischen Urteile bloß subjektiver oder relativer Art ist. Nach dieser Auffassung könne dasselbe Urteil bald analytisch, bald synthetisch sein, je nachdem der Urteilende das Prädikat in den Begriff des Subjektes aufnimmt oder nicht.[1]) Auch mit der Erklärung Kants ist Bolzano nicht einverstanden.[2]) Mit Recht bezeichnet er dessen Definition der analytischen Urteile als zu eng. Sie passe nur auf identische Urteile: A, welches B ist, ist B. Aber auch Urteile der Form „Jeder Gegenstand ist entweder B oder Nicht-B" seien offenbar zu den analytischen zu rechnen (W. II, S. 88, 4. Anm.). Vor allem aber macht er ihm den Vorwurf, daß er sich in seinen Untersuchungen lediglich darauf beschränkt habe, verschiedene Beispiele synthetischer Urteile anzugeben; er hätte beweisen müssen, daß es synthetische Urteile wirklich gibt. Bolzano selbst gründet diesen Beweis auf die Existenz einfacher Begriffe.

Zunächst ist schon jedes Urteil, dessen Subjekt ein einfacher Begriff ist, synthetisch. Wenn es demnach einfache Begriffe gibt[3]), muß es auch synthetische Urteile geben. „Denn Urteile müssen sich doch über jeden Begriff, von welcher Art er immer sein mag, bilden lassen, weil jedem Begriffe jeder andere als Prädikat entweder zukommen oder nicht zukommen muß."[4]) Ein weiteres Argument für die Existenz synthetischer Sätze stützt sich auf die Untersuchungen Bolzanos, daß nicht allen Beschaffenheiten der Vorstellungsgegenstände stets auch Bestandteile der Vorstellungsinhalte entsprechen.[5]) Es gibt demnach Wahrheiten der Form:

[1]) Man vergleiche hierzu auch die Stellungnahme Couturats (a. a. O., S. 253), der ebenfalls diese Ansicht unter besonderer Berücksichtigung der Mathematik zurückweist.

[2]) Zur Kritik von Kants analytischen und synthetischen Urteilen vergleiche man Schwarz, Bolzanos Vorstellungstheorie und Kants Lehre von der Raumanschauung; Diss. Göttingen 1911, S. 27f.

[3]) Vgl. S. 37 dieser Arbeit.

[4]) Bolzano, Beiträge S. 82. [5]) Vgl. S. 42 dieser Arbeit.

A hat b, in der die Beschaffenheit b nicht schon im Subjektbegriffe A enthalten ist. „Und solche, möchte man meinen, müßten synthetisch sein, weil doch gewiß weder A noch b willkürlich abgeändert werden dürfen, wenn der Satz wahr bleiben soll" (W. II, S. 332). Daraus allein folgt aber noch nicht ohne weiteres, daß der Satz „A hat b" in diesem Falle synthetisch ist. Immerhin könnte ja die Subjektvorstellung A oder die Prädikatvorstellung b einen B e s t a n d t e i l enthalten, der sich, unbeschadet der Wahrheit des Satzes, willkürlich variiern ließe. Als Beispiel wird der Satz angeführt: „Dieses Dreieck hat die Beschaffenheit, daß die gesamten Innenwinkel zwei Rechte betragen". In diesem Satze kann der Bestandteil „dieses" willkürlich verändert werden, ohne daß dadurch die Wahrheit des Satzes zerstört wird. Dieser Satz sei daher analytisch. Ohne Zweifel aber gibt es auch Sätze, in denen sich die Subjektvorstellung bei konstanter Prädikatvorstellung nicht beliebig variieren läßt. Von dieser Art sind z. B. alle Sätze, deren Subjektvorstellung X e i n f a c h ist oder die Form [Etwas]x hat, worin x eine einfache Vorstellung ist. In diesem Falle ist es nämlich möglich, durch Variation von X oder x jedes beliebige Etwas zum Subjekt des gegebenen Satzes zu machen. „Vorausgesetzt also, daß das Prädikat des Satzes nur nicht die allgemeinste Beschaffenheit eines Etwas überhaupt ist, so wird der Satz seine Wahrheit gewiß nicht immer behaupten, wenn wir bei unveränderter Prädikatvorstellung nur seine Subjektvorstellung ändern. Es müßte also, wenn er nichtsdestoweniger zu den bloß analytischen Wahrheiten gehören sollte, nur in seiner Prädikatvorstellung einen willkürlich abzuändernden Bestandteil einschließen" (S. 334). Aber es gibt auch Sätze, deren Prädikatvorstellung eine derartige Variation nicht gestattet. Ist z. B. die ganze Prädikatvorstellung x e i n f a c h oder von der Form: „jede der Beschaffenheiten x + y + z . . . ", worin die einzelnen Vorstellungen x, y, z . . . e i n f a c h sind, so läßt sich offenbar weder die ganze Prädikatvorstellung x noch im anderen Falle irgendeiner der Bestandteile x, y, z, . . . beliebig variieren, wenn der gegebene Satz „A hat x" bzw. „A hat jede der Beschaffenheiten (x + y + z + . . .)" wahr bleiben soll. Denn sicher würde er falsch werden, wenn an die Stelle einer der Veränderlichen eine imaginäre Vorstellung gesetzt würde.[1])

[1]) Das Wesen der „imaginären" Vorstellungen besteht darin, „daß man Bestandteile in eine Vorstellung aufnimmt, welche dem Gegenstande, den sie

Nach diesen Feststellungen ist es leicht zu zeigen, daß es Wahrheiten gibt, deren Subjekt- und Prädikatvorstellung den erwähnten Bedingungen genügen. „Denn fürs erste ist es gewiß, daß es einfache Vorstellungen gibt, die zugleich Gegenstandsvorstellungen sind (z. B. die reinen Anschauungen[1]) . . . Noch unbezweifelter ist das Dasein einfacher Beschaffenheitsvorstellungen, und zwar auch solcher, die nicht von allen Gegenständen gelten (z. B. der Begriff der Wirklichkeit[2]) . . . Da endlich bloß darum, weil eine Beschaffenheit allen zu einer gewissen Gattung gehörigen Gegenständen zukommt, noch keineswegs notwendig ist, daß sie auch in der Vorstellung von diesen Gegenständen mit vorgestellt werde, so wird es auch unter denjenigen Gegenständen, die durch eine einfache Vorstellung A oder durch eine aus einer bloß einfachen Beschaffenheitsvorstellung a zusammengesetzte Vorstellung von der Form: Etwas, das a hat, vorgestellt werden können, einige geben, von denen sich eine Beschaffenheit aussagen läßt, deren Vorstellung durchaus verschieden von A oder a ist" (W. II, S. 335 f.). Als Beispiel einer solchen Wahrheit wird der Satz angeführt: „A hat Wirklichkeit", worin A eine reine Anschauung bezeichnet. Dieser Satz enthält in der Tat keinen Bestandteil, der sich beliebig variieren ließe, ohne daß der Satz dadurch falsch würde; er ist also eine synthetische Wahrheit. Auch alle Aussagen der Form: „Die Vorstellung eines [Etwas](a + b + c + . . .) hat Gegenständlichkeit" sind synthetisch, wenn a, b, c, . . . einfache Beschaffenheitsvorstellungen sind.

Das Operieren mit einfachen Vorstellungen ist charakteristisch für die mathematische Arbeitsweise Bolzanos, und in sofern sind uns seine Untersuchungen über analytische und synthetische Urteile besonders interessant.[3]) Wir können

---

zufolge derselben darstellen könnte, Beschaffenheiten beilegen, die jenen, die sich aus den übrigen ergeben, widersprechen" (W. I, S. 315).

[1]) Jede reine Anschauung ist „eine Vorstellung, die einfach ist und dabei nur einen einzigen Gegenstand vorstellt" (W. I, S. 325 f.).

[2]) „Es ist überdies einleuchtend, daß, wenn alle einfachen Beschaffenheitsvorstellungen Beschaffenheiten von einer solchen Art vorstellen würden, die allen Gegenständen gemeinschaftlich zukommen, auch unter den zusammengesetzten Beschaffenheitsvorstellungen keine anzutreffen sein könnte, welche eine Beschaffenheit bezeichnet, die nur gewissen Gegenständen ausschließlich zukommt" (W. II, S. 335).

[3]) Immer wieder kommt Bolzano in seinen Untersuchungen auf die Unterscheidung einfacher und zusammengesetzter Vorstellungen zurück. Daß sie in seinen Erörterungen über das Verhältnis von Inhalt und Umfang einer Vorstellung eine wichtige Rolle spielt, haben wir bereits gesehen. Er ver-

sie jedoch nicht ohne Kritik hinnehmen: sie enthalten gewisse Widersprüche. Nach der Erklärung Bolzanos ist z. B. der Satz: „Ein Dreieck hat zur Winkelsumme zwei Rechte" synthetisch, weil sich kein Bestandteil angeben läßt, den man beliebig variieren kann, ohne die Richtigkeit des Satzes zu alternieren (W. II, S. 84).[1]) Abgesehen davon, daß diese Auffassung nicht dem wahren Sachverhalte entspricht, erklärt er in seinem Beweise den Satz: „Dieses Dreieck hat zwei Rechte zur Winkelsumme" für analytisch, weil der Bestandteil „dieses", unbeschadet der Wahrheit des Satzes, beliebig variiert werden kann. Dieser Zwiespalt zeigt schon zur Genüge die Unzulänglichkeit des Bolzanoschen Kriteriums.[2]) Bolzano wollte mit Hilfe der Variationsmethode ein objektives Kennzeichen für den Unterschied der analytischen und synthetischen Urteile gewinnen; er hat aber das gerade Gegenteil erreicht. Bergmann zeigt das sehr treffend an folgendem Beispiele: Der Satz „Die Winkelsumme eines n-Eckes beträgt (n—2) 2R" ist analytisch, auch im Sinne Bolzanos. Denn die Zwischenvorstellung n lässt sich, unbeschadet der Wahrheit des Satzes, beliebig variieren. Alle Sätze, die durch diese Variation entstehen, sind ebenfalls analytisch. Für n = 3 aber erhält man den von Bolzano als synthetisch bezeichneten Satz: „In jedem Dreiecke beträgt die Summe der Innenwinkel zwei Rechte". Tatsächlich läßt sich bei dieser Formulierung kein Bestandteil angeben, an dem die Variation ansetzen könnte. Formuliert man aber den Satz in folgender Weise: In jedem Dreiecke beträgt die Winkelsumme (3—2) 2 Rechte", so wird der Satz in bezug auf die Vorstellung „drei" wieder analytisch. „So würde man sich, wollte man das Bolzanosche Kriterium annehmen, völlig der Laune der Sprache preisgeben".[3]) Wir müssen also feststellen, daß es Bolzano nicht gelungen ist, die Kantsche Erklärung der analytischen Urteile durch eine bessere Charakteristik zu ersetzen.

---

wendet sie auch zur Charakterisierung der Anschauung als einfacher Einzelvorstellung. Später gründet er sogar auf die Annahme der Einfachheit des Begriffes „Sollen" einen Beweis für die Geltung eines höchsten Sittengesetzes.

[1]) Auch die Sätze der Arithmetik und Algebra werden für synthetisch erklärt (Beitr. I, § 8; W. II, S. 85, 1. Anm.). In W. III, S. 241, wird gesagt, die allgemeine Größenlehre sei noch viel eher analytisch als die Logik.

[2]) Es finden sich noch manche andere Unstimmigkeiten in seiner Darstellung. So finden wir (W. III, § 315 u. W. IV, § 447) die Ansicht ausgesprochen, daß die analytichen Urteile nicht von selbst einleuchten, sondern erst aus den synthetischen gefolgert werden.

[3]) Bergmann, a. a. O., S. 75 f.

Die Bolzanosche Einteilung der analytischen und synthetischen Sätze stützt sich auf die Variation der Vorstellungen. Die Anwendung dieser mathematischen Methode legt uns wieder einen Vergleich mit der Logistik nahe. Tatsächlich entspricht die „formal wahre" urteilsmäßige Funktion, Russells den analytischen Sätzen Bolzanos, die bei beliebiger Variation eines Bestandteiles wahr bleiben. Bolzano nennt aber auch falsche Sätze analytisch, wenn sie bei der Variation falsch bleiben. Diese haben ein Gegenstück in der „Nullklasse". Die Logik bezeichnet a als Nullklasse, wenn sich kein Wert von x angeben läßt, der die urteilsmäßige Funktion „x ist ein a" befriedigt, d. h. wenn diese Funktion für jedes x falsch wird.[1])

3. Beziehungen zwischen Sätzen an sich.

Die Untersuchungen der Beziehungen zwischen Sätzen an sich erfolgt nach ähnlichen Gesichtspunkten, nach denen die verschiedenen Verhältnisse zwischen Vorstellungen an sich betrachtet wurden. Bolzano zeigt zunächst, daß es keine einander gleichen Sätze gibt, und zwar aus denselben Gründen, die auch für die Beantwortung dieser Frage bei den Vorstellungen maßgebend waren. Wohl können Sätze einander ähnlich sein, wenn sie nämlich so viele gemeinschaftliche Bestandteile haben, daß wir sie leicht miteinander verwechseln können. Die Beziehungen, die Bolzano durch Vergleich zweier Sätze hinsichtlich ihres Inhaltes und Umfanges ermittelt, haben keine weitere Bedeutung. Durchaus beachtenswert aber sind die Verhältnisse zwischen Sätzen an sich, die durch Anwendung der Variationsmethode gewonnen werden.

Wir haben bereits gesehen, daß die Wahrheit eines Satzes durch Variation seiner Bestandteile alterniert werden kann. Lassen sich mehrere Sätze angeben, in denen die Vorstellungen i, j, . . . gemeinsam vorkommen, so erhebt sich die Frage, „ob es wohl einige an die Stelle der i, j, . . . gesetzte Vorstellungen gebe, die so beschaffen sind, daß jene Sätze dadurch alle zugleich wahr werden" (W. II, S. 100). Ist diese Frage zu bejahen, so

[1]) Russell, The principles of mathematics, Bd. I, Cambridge 1903, S. 74 und 93; Couturat, a. a. O., S. 27.

besteht zwischen den Sätzen das Verhältnis der „Verträglichkeit". Ein Verhältnis der „Unverträglichkeit" liegt vor, wenn es keine Vorstellungen gibt, die an Stelle der Variabeln i, j, . . . die Sätze sämtlich wahr machen. Verträgliche Sätze sind z. B.: „Diese Blume blüht rot", „diese Blume ist wohlriechend" und „diese Blume gehört in die zwölfte Klasse des Linnéschen Systems". Ersetzt man nämlich die gemeinsame Vorstellung „Blume" durch die Vorstellung „Rose", so werden alle drei Sätze wahr. Unverträglich sind z. B. folgende drei Sätze: „Kein endliches Wesen hat Allwissenheit", „der Mensch ist ein endliches Wesen" und „ein Mensch hat Allwissenheit". Und zwar sind diese Sätze unverträglich in bezug auf die Vorstellungen „endliches Wesen", „Mensch" und „Allwissenheit". Denn es lassen sich keine Vorstellungen angeben, die an Stelle dieser Veränderlichen alle drei Sätze zugleich wahr machen; werden zwei wahr, dann ist der dritte gewiß falsch.

Bei der Variation der Vorstellungen haben wir bereits festgestellt, daß die Anwendung dieser Methode nur dann berechtigt ist, wenn die zu untersuchenden Vorstellungen gemeinsame Bestandteile enthalten.[1]) Diese Einschränkung gilt unbedingt auch für die Sätze. Das Bolzanosche Kriterium der Verträglichkeit bzw. Unverträglichkeit läßt sich demnach nur auf Sätze anwenden, die gemeinsame Bestandteile haben. Der entscheidende Einwand aber gegen eine unbeschränkte Anwendung dieser Methode ist die Tatsache, daß sie je nach Wahl der verschiedenen Vorstellungen zu verschiedenen Ergebnissen führt. Die Bolzanosche Definition hat also nur einen beschränkten Wert, den Bolzano allerdings auch selbst erkannt hat. „Wenn wir in einerlei Inbegriffe von Sätzen A, B, C, D, . . . bald diese, bald jene Vorstellungen als die veränderlichen ansehen, können sie bald als verträglich, bald als unverträglich erscheinen . . . Wir müssen also . . . immer beisetzen, in welcher Rücksicht, d. h. in Beziehung auf welche beliebig abzuändernde Vorstellungen i, j, . . . wir dieses meinen" (W. II, S. 101 f.). Die weitere Untersuchung des Verhältnisses der Verträglichkeit erfolgt nun in der Weise, daß Bolzano eine Reihe erläuternder Lehrsätze aufstellt, die in Formulierung und Beweis den vorwiegend mathematischen Charakter dieser Untersuchungen erkennen lassen. Nur einen dieser Sätze wollen wir hier anführen: „Zu jedem beliebigen

[1]) Vgl. S. 70 dieser Arbeit.

Satze A lassen sich, wenn erst gewisse Vorstellungen in ihm uns als veränderlich angegeben sind, unendlich viele, die mit ihm unverträglich sind, und falls es nur kein seiner ganzen Art nach falscher Satz ist[1]), auch unendlich viele, die sich mit ihm vertragen, ausfindig machen" (W. II, S. 107). Dieser eigenartige Satz, der deutlich die mathematische Einstellung Bolzanos kennzeichnet, wird folgendermaßen begründet. Alle Sätze der Form: „Der Satz A ist falsch", „Daß der Satz A falsch sei, ist wahr" usw., die sich in dieser Weise in unendlicher Menge bilden lassen, sind mit dem gegebenen Satze A unverträglich. Denn keiner dieser Sätze kann bei der Variation der als veränderlich festgesetzten Vorstellungen gleichzeitig mit dem ursprünglichen Satze A wahr werden. Es lassen sich aber auch unendlich viele Sätze aufstellen, die mit A verträglich sind; denn jede Wahrheit, in der die Variablen des Satzes A nicht vorkommen, ist mit A verträglich, weil sie von der Variation unberührt bleibt. Bolzano scheint diese Untersuchungen in erster Linie aus Vorliebe für mengentheoretische Spekulationen angestellt zu haben. Das zeigen deutlich auch die übrigen Sätze. Das angeführte Beispiel gehört noch zu den relativ einfachsten.

Als besondere Arten der Verträglichkeit behandelt Bolzano eingehend die Verhältnisse a) der Ableitbarkeit, b) der Gleichgültigkeit, c) der Unterordnung, d) der Verkettung. Wir wollen uns hier mit dem Begriffe der Ableitbarkeit etwas näher befassen, weil dieses Verhältnis auch die ganze Lehre von den Schlüssen beherrscht. Die Verträglichkeit der Sätze A, B, C, D, ... hinsichtlich der Vorstellungen i, j ... besagt nach der gegebenen Erklärung nichts anders, als daß es gewisse Vorstellungen gibt, die an Stelle der Veränderlichen i, j, ... jene Sätze sämtlich in wahre verwandeln. Immerhin kann es außer diesen Vorstellungen noch einige geben, die nur den einen oder anderen Teil der Sätze, nicht aber alle wahr machen. Besteht nun zwischen zwei Teilmengen eines Inbegriffes verträglicher Sätze die Beziehung, daß alle Vorstellungen, die an Stelle der Veränderlichen die Sätze der ersten Teilmenge wahr machen, gleichzeitig auch die Sätze der zweiten Teilmenge in wahre verwandeln, so kann man aus der erkannten Wahrheit der zuerst betrachteten Sätze ohne weiteres

[1]) Ein Satz heißt seiner ganzen Art nach falsch, wenn sein Gültigkeitsgrad = 0 ist, d. h. wenn die durch Variation gewisser Vorstellungen sich aus ihm entwickelnden Sätze alle falsch sind (W. II, S. 82).

auch die Wahrheit der anderen Sätze entnehmen. Bolzano bezeichnet dieses Verhältnis als „Ableitbarkeit". Die Sätze M, N, O, . . . heißen also ableitbar aus den Sätzen A, B, C, D, . . . , und zwar hinsichtlich der veränderlichen Teile i, j, ... „wenn jeder Inbegriff von Vorstellungen, der an der Stelle der i, j, . . . die sämtlichen A, B, C, D, . . . wahr macht, auch die gesamten M, N, O, . . . wahr macht" (W. II, S. 113 f.). Die Sätze A, B, C, D, . . . werden Vordersätze oder Prämissen genannt, die Sätze M, N, O, . . . , die sich aus ihnen folgern lassen, heißen Nach- oder Schlußsätze. Die Beziehung der Ableitbarkeit besteht nicht notwendig wechselseitig. So läßt sich z. B. von den beiden Sätzen „Alle A sind B" und „Einige A sind B" der zweite Satz aus dem ersten ableiten, wenn man die Vorstellungen A und B als veränderlich betrachtet, nicht aber läßt sich der erste aus dem zweiten folgern. Vergleichen wir die Ableitbarkeit mit dem übergeordneten Verhältnis der Verträglichkeit, so finden wir den wesentlichen Unterschied darin, daß verträgliche Sätze zusammen wahr sein können, während ableitbare Sätze zusammen wahr sein müssen.

Das Verhältnis der Ableitbarkeit wird nun in der Weise näher bestimmt, daß eine Reihe von Lehrsätzen aufgestellt wird (im ganzen 33), die uns deutlich zeigen, wie weit sich Bolzano in mengentheoretische Untersuchungen verstiegen hat. Nur ein Beispiel dafür! „Wenn die Sätze M, N, O, . . . aus den Sätzen A, B, C, D, . . . hinsichtlich auf gewisse Vorstellungen i, j, . . . , die Sätze P, Q, R, . . . aber aus den Sätzen F, G, H, . . . hinsichtlich auf gewisse Vorstellungen k, l, . . . , die von den i, j, . . . zum Teile oder auch gänzlich verschieden sein mögen, ableitbar sind, so ist der Inbegriff der Sätze M, N, O, . . . P, Q, R, . . . ableitbar aus dem Inbegriffe der Sätze A, B, C, D, . . . F, G, H, . . . hinsichtlich auf den Inbegriff der Vorstellungen i, j, . . . k, l, . . . , sofern nur keine der Vorstellungen k, l, . . . , die von den i, j, . . . verschieden ist, in den Sätzen A, B, C, D, . . . , und keine der Vorstellungen i, j, . . . , die von den k, l, . . . verschieden ist, in den Sätzen F, G, H, . . . erscheint, und sofern überdies der Inbegriff der Sätze A, B, C, D, . . . F, G, H, . . . hinsichtlich auf die Vorstellungen i, j, . . . k, l, . . . auch einen verträglichen Inbegriff darstellt" (W. II, S. 121). Nun folgt die Begründung, ebenso langstilig und abstrakt wie der Lehrsatz selbst, ohne irgendein praktisches Beispiel.

Wir haben schon wiederholt auf die Ähnlichkeit gewisser Beziehungen der Logistik und der Bolzanoschen Logik hingewiesen. Auch der Begriff der Ableitbarkeit findet sich — unter anderem Namen natürlich — in der Logistik wieder. Dort wird die inhaltliche Abhängigkeit sehr scharf von der formalen Abhängigkeit unterschieden. Die Abhängigkeit der ersten Art besteht in dem Verhältnis zweier Urteile, die nur zusammen wahr sein können, z. B.: „Wenn eine Figur ein Dreieck ist, so beträgt ihre Winkelsumme 180^0". Die formale Abhängigkeit findet zwischen zwei Urteilsfunktionen statt. „Überdies", sagt Couturat, „müssen die beiden Seiten einer formalen Abhängigkeit dieselbe Veränderliche enthalten ..., während die beiden Seiten einer inhaltlichen Abhängigkeit zwei Urteile sein können, die kein Glied gemein haben, ja nicht einmal irgendwelche Ähnlichkeit besitzen"[1]). Eine formale Abhängigkeit ist demnach z. B. der Satz: „Wenn x ein Dreieck ist, so hat x die Winkelsumme 180^0". Diese Beziehung bleibt wahr, welche Werte man auch für x einsetzen mag. Daraus geht hervor, daß der Bolzanosche Begriff der Ableitbarkeit zu eng ist. Gewiß sind alle Sätze, die dieser Definition genügen, ableitbar; umgekehrt aber sind nicht alle in diesem Verhältnisse stehenden Sätze so beschaffen, daß sich die Variationsmethode auf sie anwenden läßt, denn nicht alle ableitbaren Sätze haben gemeinsame Bestandteile. Die Erklärung der Ableitbarkeit mit Hilfe des mathematischen Variationsprinzips muß daher als verfehlt bezeichnet werden. Auf eine Besprechung der übrigen Arten der Verträglichkeit können wir hier verzichten, da diese Beziehungen ebenfalls nur Anwendungen der Variationsmethode darstellen.[2]) Das gilt auch von den verschiedenen Arten

[1]) Couturat, a. a. O., S. 24 f.

[2]) Die übrigen Arten der Verträglichkeit sollen hier wenigstens in ihrer Definition folgen:

Die Sätze A, B, C, D, ... und M, N, O, ... stehen in dem Verhältnis der Gleichgültigkeit, „wenn das Verhältnis der Ableitbarkeit zwischen den Sätzen A, B, C, D, ... und M, N, O, ... wechselseitig besteht, und dies zwar hinsichtlich auf dieselben Vorstellungen i, j, ..." (W. II, S. 133).

Ein Verhältnis der Unterordnung liegt vor, „wenn das Verhältnis der Ableitbarkeit ... nicht wechselseitig, sondern nur von der einen Seite besteht, wenn also z. B. nur die Sätze M, N, O, ... aus den Sätzen A, B, C, D, ..., nicht aber auch diese aus jenen ableitbar sind, hinsichtlich auf gewisse veränderliche Vorstellungen i, j, ..." (S. 141).

Von Verkettung spricht man, „wenn es zwar Vorstellungen gibt, die an der Stelle der i, j, ... die sämtlichen A, B, C, ... und M, N, O, ... wahr machen, aber auch andere, die nur die sämtlichen A, B, C, ... ohne die sämtlichen M, N, O, ..., ingleichen andere, die nur die sämtlichen M, N, O, ... ohne die sämtlichen A, B, C, ... wahr machen" (S. 143).

der Unverträglichkeit. Der Einfluß der Mathematik auf diese Untersuchungen ist demnach evident. Bolzano hat versucht, einen wesentlichen Teil der Lehre von den Sätzen mathematisch zu begründen und entsprechend darzustellen.

Der Begriff der Gültigkeit, mit dem wir uns früher schon beschäftigt haben, läßt sich auf jeden einzelnen Satz anwenden, wenn wir gewisse Bestandteile in ihm als veränderlich ansehen. Ein Vergleich eines oder mehrerer Sätze mit einem anderen bezüglich der Gültigkeit führt uns zu einer neuen wichtigen Beziehung, dem Begriffe der W a h r s c h e i n l i c h k e i t. „Betrachten wir nämlich in einem einzelnen Satze A oder auch in den mehreren A, B, C, D, . . . gewisse Vorstellungen i, j, . . . als veränderlich, und sind im letzteren Falle die Sätze A, B, C, D, . . . hinsichtlich dieser Vorstellungen in dem Verhältnisse einer Verträglichkeit, so wird es öffers ungemein wichtig, das Verhältnis zu erfahren, in welchem die Menge der Fälle, darin die Sätze A, B, C, D, . . . alle wahr werden, zur Menge derjenigen Fälle steht, in welchen neben ihnen auch noch ein anderer Satz M wahr wird" (W. II, S. 171). Dieses Verhältnis bestimmt die Wahrscheinlichkeit, die dem Satze M aus den Voraussetzungen A, B, C, D, . . . erwächst. Die Wahrscheinlichkeit eines Satzes wird demnach durch einen Bruch dargestellt, der das Verhältnis zweier Mengen von S ä t z e n a n s i c h angibt. Dieser sog. Laplacesche Bruch läßt sich nicht unmittelbar, d. h. durch bloße Abzählung der in Frage stehenden Mengen gewinnen, er muß vielmehr auf andere Weise bestimmt werden. Ist z. B. als Voraussetzung gegeben, daß Cajus aus einer Urne, in der sich mehrere numerierte Kugeln befinden, eine herausholt, dann haben die Sätze „Cajus nimmt die Kugel Nr. 1" und „Cajus nimmt die Kugel Nr. 2" gleichen Wahrscheinlichkeitsgrad. Wird nämlich in Wirklichkeit etwa die Kugel Nr. 3 herausgenommen, so werden die beiden Sätze, die sich n u r in den veränderlichen Vorstellungen „Nr. 1" und „Nr. 2" unterscheiden, dann und nur dann wahr, wenn wir diese Vorstellungen durch die Vorstellung „Nr. 3" ersetzen. Beide Sätze haben demnach gleiche Wahrscheinlichkeit. Aus diesen Betrachtungen gewinnt nun Bolzano eine allgemeine Methode, die Wahrscheinlichkeit eines Satzes aus den Voraussetzungen zu bestimmen. Wir wollen das an einem von Bolzano gegebenen Beispiele erläutern, statt seinen langen theoretischen Erörterungen nachzugehen.

Die Voraussetzung bestehe in dem Satze, daß Cajus aus

einer Urne, in der sich 90 schwarze und 10 weiße Kugeln befinden, eine herausnimmt. Wie groß ist bei dieser Voraussetzung die Wahrscheinlichkeit, daß Cajus eine schwarze Kugel aus der Urne herausholt? Dabei sollen nur die Vorstellungen „Cajus", „Kugel", „schwarz" und „weiß" der Variation unterworfen sein. Wir bilden zunächst eine Menge von Sätzen, die bei der gegebenen Voraussetzung alle den gleichen Wahrscheinlichkeitsgrad haben und außerdem so beschaffen sind, daß bei der Variation der Vorstellungen stets einer und nur einer dieser Sätze gleichzeitig mit der Voraussetzung wahr wird. Zu diesem Zwecke ordnen wir jeder der 100 Kugeln eine der Zahlen von 1 bis 100 zu und stellen dann folgende Sätze auf:

Cajus hat die Kugel Nr. 1 herausgenommen;
Cajus hat die Kugel Nr. 2 herausgenommen;

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

Cajus hat die Kugel Nr. 100 herausgenommen.

Alle diese Sätze sind nach der früheren Erklärung gleich wahrscheinlich. Außerdem erkennt man, daß bei der Variation der veränderlichen Vorstellungen gleichzeitig mit der Voraussetzung auch einer und nur einer von den 100 Sätzen wahr wird. Jeder dieser Sätze beträgt demnach $^1/_{100}$ der Menge aller Fälle, in denen die Voraussetzung wahr wird. Nach dieser Voraussetzung befinden sich aber nur 90 schwarze Kugeln in der Urne. Somit kann der Satz, daß Cajus eine schwarze Kugel herausnimmt, nur durch 90 der aufgestellten Sätze erfüllt werden, wenn die 10 übrigen, die sich ja nur auf weiße Kugeln beziehen, falsch sind. Die Wahrscheinlichkeit des in Frage stehenden Satzes beträgt demnach $^{90}/_{100} = {}^9/_{10}$. Auf die weiteren Untersuchungen Bolzanos über die Wahrscheinlichkeit, die ebenfalls mit Hilfe der Variationsmethode völlig exakt durchgeführt werden, können wir hier nicht näher eingehen.[1])

Bolzano hat der Wahrscheinlichkeitsrechnung eine ganz besondere Bedeutung beigemessen. So setzt er z. B. den Beweggrund, der uns bestimmen soll, an die Lösung einer Aufgabe

[1]) Die weitere Untersuchung der Wahrscheinlichkeit erstreckt sich zunächst auf die Grenzfälle des Laplaceschen Bruches und die Bedeutung des Wahrscheinlichkeitsgrades $^1/_2$. Es folgen dann eine Reihe Lehrsätze mit Beweis und schließlich in den Anmerkungen wertvolle Ergänzungen aus der Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

heranzugehen, gleich dem Produkte aus der Wahrscheinlichkeit W, daß wir die gesuchte Wahrheit finden, und dem Nutzen N, den die Erkenntnis dieser Wahrheit verspricht (W. III, S. 349). Prihonsky, ein Schüler Bolzanos, erklärt, sein Lehrer habe oft gemahnt, sich mit einer durch Wahrscheinlichkeit gesicherten Ansicht zu begnügen, statt sich dem Skeptizismus in die Arme zu werfen, nur weil man in einer Frage zu keiner mathematischen Gewißheit gelangen könne.[1]) Und so finden wir in fast allen Schriften Bolzanos die Bedeutung der Wahrscheinlichkeit erwähnt.[2]) Sie ist auch deshalb für ihn von besonderem Interesse, weil er der Auffassung ist, daß die Schlüsse nach bloßer Wahrscheinlichkeit die einzige Quelle unseres Irrtums seien. Immer wenn wir nach Schlüssen der Wahrscheinlichkeit urteilen, besteht die Möglichkeit des Irrtums (W. III, § 309). So sind z. B. alle sogenannten Erfahrungsurteile „kraft ihrer Herleitung nur Wahrscheinlichkeitsurteile, weil sie aus einem Obersatze entspringen, der nur Wahrscheinlichkeit hat" (W. II, S. 35, Anm.). Wir haben früher schon erwähnt, daß Bolzano der Leibnizschen Philosophie nahe steht, an der ihn besonders das Mathematische fesselt. Auch Leibniz hat die Bedeutung der Wahrscheinlichkeitsrechnung für die Logik hoch eingeschätzt. Wenn sich eine Frage nicht schlechthin entscheiden lasse, so könne man immerhin den Grad der Wahrscheinlichkeit aus den vorliegenden Umständen bestimmen und folglich vernunftgemäß entscheiden, welche Wahl zu empfehlen sei.[3]) Dagegen sagt Kant, als dessen Gegner wir Bolzano immer wieder finden, er müsse sich „das Spielwerk von Wahrscheinlichkeit und Mutmaßung" verbitten.[4]) Wir sehen also, daß die Gegnerschaft Bolzanos zu Kant auch in dessen Stellung zu mathematischen Problemen begründet ist.

---

[1]) Prihonsky, Neuer Anti-Kant, Bautzen 1850.

[2]) Vgl. z. B. Bolzano, Athanasia oder Gründe für die Unsterblichkeit der Seele, Sulzbach 1838, S. 55 f.

[3]) Leibniz, Nouveaux essais, L. IV, Ch. 2, § 14.

[4]) Kant, Prolegomena zu einer jeden künftigen Metaphysik, W. W. Hart., IV. Bd., S. 369.

IV. Abschnitt.

Die Lehre von den Schlüssen.

1. Bolzanos Kritik an der herkömmlichen Schlußlehre.

Die Grundlage der Schlußlehre Bolzanos bildet das Verhältnis der Ableitbarkeit, das bereits ausführlich behandelt wurde. Die Sätze M, N, O, . . . heißen ableitbar aus den gegebenen Sätzen A, B, C, D, . . . hinsichtlich der veränderlichen Satzelemente i, j, . . . , „wenn jeder Inbegriff von Vorstellungen, der an der Stelle der i, j, . . . die sämtlichen A, B, C, D, . . . wahr macht, auch die gesamten M, N, O, . . . wahr macht" (W. II S. 114). Diese Definition beeinflußt und charakterisiert die ganze Lehre von den Schlüssen, in der Bolzano von der üblichen Darstellungsweise weit abweicht.

Bolzano ist der Ansicht, man habe die Ableitbarkeit bisher „nicht in der gehörigen Allgemeinheit" dargestellt, woraus sich manche Ungenauigkeiten und Fehler in der herkömmlichen Schlußlehre erklärten.[1]) So habe man z. B. die Ableitbarkeit stets als ein Verhältnis definiert, das zwischen Urteilen bestehe. Diese Erklärung empfindet Bolzano als eine für die Entwicklung der Logik nachteilige Einschränkung. Nach seiner Auffassung gehört die Ableitbarkeit zu den Verhältnissen zwischen Sätzen, „die ihnen objektiv, d. h. ganz abgesehen von unserem Vorstellungs- und Erkenntnisvermögen zukommen und eben darum auch so dargestellt werden sollen" (S. 128, 1. Anm.). Die Schlußfolgerungen sind von unserem subjektiven Erschließen völlig unabhängig, sie bestehen analog den mathematischen Gesetzen an sich.

Weiter erinnert Bolzano an die ungenauen und auseinandergehenden Erklärungen der Begriffe Materie und Form eines

1) Vgl. dazu unsere Stellungnahme auf S. 87 der vorliegenden Arbeit

Schlusses.[1]) Er ist der Meinung, alle diese Erklärungen wären bestimmter ausgefallen, wenn man sich deutlicher bewußt geworden wäre, daß jeder Schluß veränderliche Vorstellungen enthielte. „Dann hätte man alsbald erkannt, daß nur in eben diesen veränderlichen Vorstellungen die eigentliche Materie des Schlusses bestehe, die Form desselben aber dasjenige sei, was alle Schlüsse, die sich durch ihre bloße Materie unterscheiden, gemeinschaftlich haben" (W. II, S. 516 f.). Ein Blick auf die Lehre von den Gleichungen, denen Bolzano das Variationsprinzip entnommen hat, erklärt uns diese Auffassung. Bei den Gleichungen besteht nämlich die Materie lediglich in den Veränderlichen (Unbekannten), während alle übrigen Größen und ihre Verbindungsart die Form ausmachen.

Auch die übliche Einteilung der Schlüsse verwirft Bolzano, und zwar erklärt sich hieraus ein wesentlicher Unterschied zwischen seiner Auffassung und der gewöhnlichen Darstellungsweise. Die herkömmliche Schlußlehre teilt die Schlüsse in unmittelbare und mittelbare Schlüsse ein. Unmittelbare Schlüsse sind solche, bei denen ein neues Urteil auf Grund eines einzigen gegebenen Urteils gebildet wird. Hat das neue Urteil zwei oder mehrere Vordersätze, so nennt man den Schluß mittelbar. Diese Einteilung billigt Bolzano nicht. In der Begründung seiner Ansicht gibt er seine mathematische Einstellung wieder klar zu erkennen. Die Definition der Ableitbarkeit, so argumentiert er, gestatte Schlüsse mit jeder beliebigen Anzahl von Vordersätzen und Schlußsätzen. „Denn jede beliebige Menge von Sätzen A, B, C, D, . . . , die nur in Hinsicht auf die Vorstellungen i, j, . . . untereinander verträglich sind, können in dieser Bedeutung als Vordersätze, und jede beliebige Menge von Sätzen M, N, O, . . . , die nur so oft wahr werden, als jene es werden (dergleichen sich jederzeit unzählig viele zusammenbringen lassen), können als Schlußsätze angesehen werden" (S. 540). Wollte man daher, so meint Bolzano, eine Einteilung aufstellen, die auf der Anzahl der Prämissen beruhe, so müsse man ihr mehr als

[1]) Kant (Log., § 59) und Kiesewetter (Log., § 147) z. B. zählen nur die Prämissen zur Materie eines Schlusses; andere wie Maaß (Log., § 337) und Krug (Log., § 72) rechnen auch den Schlußsatz dazu. Von der Form eines Schlusses gibt Kant die Erklärung, daß sie „in der Konklusion, sofern sie die Konsequenz enthält", bestehe, und Kiesewetter schreibt in seinem Grundrisse, „die Art und Weise, wie aus den Vordersätzen der Schlußsatz hergeleitet werde", heiße die Form des Schlusses, während er an anderer Stelle in der Verbindung der Prämissen die Form eines Schlusses erblickt (W. II, S. 515 f.).

zwei Glieder geben. Denn so sehr sich ein Schluß mit zwei Prämissen von einem Schlusse mit nur einem Vordersatze unterscheide, so sehr unterscheide sich auch ein Schluß mit drei Vordersätzen von einem mit nur zweien, und ein Schluß mit vier Prämissen von einem mit drei Vordersätzen usw. Die übliche Einteilung ist nur dann berechtigt, wenn alle Schlüsse, denen mehr als zwei Prämissen zugrunde liegen, lediglich aus einer Verbindung von Schlüssen mit nur einer oder zwei Prämissen bestehen. Das ist aber nach Bolzanos Ansicht nicht der Fall; es gibt vielmehr „Schlüsse aus drei und mehreren Vordersätzen, die ebenso einfach und eigentümlich als irgendein anderer sind" (W. II, S. 517). Damit stellt sich Bolzano in einen scharfen Gegensatz zu der bisherigen Schlußlehre, nach der alle mittelbaren Schlüsse, die nicht einfach sind, d. h. mehr als zwei Urteile zur Begründung ihres Schlußsatzes voraussetzen, lediglich Verbindungen oder Wiederholungen einfacher Schlüsse sind.[1]) Bolzano behauptet, „es gebe Schlußarten, welche uns aus gewissen Sätzen andere ableiten lehren, die wir durch keine auch noch so oft wiederholte Syllogismen aus ihnen ableiten könnten" (S. 542). Als Beleg führt er verschiedene Schlüsse an, bei denen es nicht möglich ist, den Schlußsatz durch wiederholte Anwendung einfacher Syllogismen zu gewinnen. Zwei von diesen Beispielen wollen wir hier wiedergeben. Aus den n Vordersätzen von folgender Form:

„Die Vorstellung A ist eine Einzelvorstellung.
Die Vorstellung B ist eine Einzelvorstellung.
Die Vorstellung C ist eine Einzelvorstellung.
(im ganzen n solcher Sätze) und dem Satze:
Kein Gegenstand einer der Vorstellungen A, B, C, . . .
ist ein Gegenstand zweier"

läßt sich der Schlußsatz ableiten:

„Die Anzahl der A, B, C, . . . ist = n" (S. 463).

Dieser Schlußsatz läßt sich in der Tat weder durch einen einzelnen noch durch eine Verbindung mehrerer Syllogismen gewinnen.

Ebenso folgt aus den beliebig vielen Prämissen:

---

[1]) Das Schließen ist stets ein abschließender Akt. Eine eigentliche Kombination von Schlüssen ist nicht möglich. Wohl lassen sich zwei Schlüsse in der Weise verbinden, daß der Schlußsatz des einen Schlusses als Prämisse des anderen auftritt, und zwar läßt sich dieses Verfahren beliebig fortsetzen. In diesem Sinne spricht man dann von einfachen und zusammengesetzten Schlüssen. Dyroff-Hagemann, a. a. O., S. 98.

„Was a hat, hat b.
Was a hat, hat c.
Was a hat, hat d."

. . . . .

als Schlußsatz: „Was a hat, hat die Beschaffenheit, jeder der Vorstellungen B, C, D, . . . zu unterstehen" oder auch der Schlußsatz: „Die Vorstellung [Etwas](b+c+d+ . . .) hat Gegenständlichkeit" (W. II, S. 418).

Diese Beispiele zeigen auch, daß ein Satz aus beliebig vielen Voraussetzungen unmittelbar und nicht erst schrittweise durch Kombination je zweier Prämissen erschlossen werden kann. „Irrig" ist es demnach, „daß es nie mehr als zwei Prämissen gebe, aus welchen ein Schlußsatz, nach einer eigenen, einfachen Art zu schließen, gezogen werden könnte" (S. 553). Aus dem letzten Beispiele ersieht man auch, daß die übliche Auffassung, der Schlußsatz dürfe nur zwei aus den Prämissen gewonnene T e r m i n i enthalten, eine unhaltbare Einschränkung bedeutet. „Er kann nur eine, aber auch drei und vier derselben, er kann endlich auch veränderliche Vorstellungen, welche in den Prämissen gar nicht liegen, enthalten" (S. 554). Zu allen Fällen liefert Bolzano Beispiele. Er teilt auch nicht die Ansicht, daß jede Prämisse zwei Termini (veränderliche Vorstellungen) enthalten müsse, in zwei Prämissen aber nur drei verschiedene Termini vorkommen könnten. So folge z. B. aus den zwei Sätzen:

A ist B
C ist D

der Schlußsatz: „In einem Ganzen[1]), darin die durch A und C vorgestellten Gegenstände als Teile erscheinen, fehlt es auch nicht an Teilen, die den Vorstellungen B und D unterstehen" (S. 416). Nichts sei alltäglicher als diese Schlußart, meint Bolzano. Nachdem man z. B. bemerkt habe, daß sich der Akademiker A mit mathematischen, der Akademiker B mit naturhistorischen Untersuchungen beschäftige, schließe man ohne weiteres, daß es in jener gelehrten Gesellschaft, der sie als Mitglieder angehören, weder an Mathematikern noch an Naturforschern fehle. „Die Ursache, weshalb man diesen Schluß gleichwohl nicht in die Lehrbücher der Logik aufgenommen, dürfte wohl darin zu suchen sein,

[1]) Bolzano übersieht, daß es sich hier um einen ganz neuen Begriff handelt.

weil man insgemein von der Voraussetzung ausging, daß nur aus einer Verbindung von Sätzen, die einen gemeinschaftlichen Bestandteil — einen sog. Mittelbegriff — enthalten, etwas geschlossen werden könne" (W. II, S. 417, Anm.).[1]) Schließlich sei noch erwähnt, daß Bolzano auch in anderen Stücken die herkömmliche Schlußlehre nicht billigt.[2]) So lehnt er z. B. auch die bei Kant mitherrschende Einteilung der Schlüsse in kategorische, hypothetische und disjunktive ab.

Die kritischen Untersuchungen Bolzanos, in denen man nicht immer mit ihm übereinstimmen kann, sind von dem Gedanken getragen, daß die übernommene Syllogistik die deduktive Art des Schließens in keiner Weise erschöpft.[3]) Die Erklärung der Ableitbarkeit gestattet, — theoretisch wenigstens — „aus einem jeden gegebenen Satze . . . , um so viel mehr aus einem jeden Inbegriffe mehrerer (nur miteinander verträglicher) Sätze eine unendliche Menge anderer abzuleiten" (S. 391). Selbstverständlich kann sich die Logik nur mit solchen Schlüssen befassen, die zu ihrer Beurteilung nur „logische Kenntnisse" erfordern. Daß aber die Definition der Ableitbarkeit auch Schlüsse zuläßt, die zu ihrer Beurteilung besonderes Fachwissen voraussetzen, zeigt folgendes Beispiel. Aus dem Satze: „Dieses ist ein Dreieck" läßt sich der Satz ableiten: „Dieses ist eine Figur, deren Winkelsumme 2 Rechte beträgt". Denn so oft wir den gemeinsamen Bestandteil „dieses" durch irgendeine andere Vorstellung ersetzen, die den ersten Satz wahr macht, wird jedesmal auch der Schlußsatz wahr. Diese Ableitung setzt aber die Kenntnis des mathematischen Satzes voraus, daß die Winkelsumme im Dreieck 2 Rechte beträgt. Mit derartigen Schlüssen macht uns die Logik nicht bekannt, sie liefert nur solche Ableitungsarten, „deren Richtigkeit sich aus bloß logischen Begriffen einsehen läßt" (S. 392). Immerhin ist die Möglichkeit einer unbeschränkten Entwicklung der Schlußlehre gegeben. Bolzano behandelt nur die „wichtigsten" Arten der Sätze, besonders Aussagen über Vorstellungen oder auch über Sätze selbst, wobei diese dann als veränderlich angesehen werden. Vor allem aber berücksichtigt er „die Form, welche zum Vorscheine kommt, wenn wir in einem Satze alles

---

[1]) Vgl. dazu die übliche Auffassung: Dyroff-Hagemann, a. a. O., S. 97 f.

[2]) Man vergleiche dazu Bergmann, a. a. O., S. 91 f.

[3]) Diese Auffassung spricht Bolzano schon in den „Beiträgen" (S. 65), die 20 Jahre vor der „Wissenschaftslehre" erschienen sind, ganz klar aus.

als willkürlich ansehen, was sich nur immer verändern darf, wenn er ein Satz bleiben soll" (W. II, S. 393). Mag die Kritik Bolzanos in manchen Stücken unberechtigt sein, jedenfalls hat er erkannt und nachgewiesen, daß die herkömmliche Syllogistik nur einen beschränkten Teil der Schlüsse erschöpft. Und zu dieser Erkenntnis hat ihn in erster Linie seine mathematische Betrachtungsweise geführt. Als Mathematiker war er gewohnt, Schlüsse zu ziehen, denen keine Formen der üblichen Schlußlehre entsprachen. Tatsächlich ist die Entwicklung der modernen Schlußlehre in der Hauptsache das Verdienst der Mathematiker.[1]) Sie haben die vermeintlich längst erledigte syllogistische Theorie weiter entwickelt und zugleich neue Schlußgattungen entdeckt. Besonders verdanken wir in dieser Hinsicht der algebraischen Logik manche wichtige Aufklärung.

2. Verschiedene Schlußarten.

Der Darstellung der verschiedenen Schlüsse, die Bolzano im IV. Hauptstücke seiner Wissenschaftslehre entwickelt, fehlt jede innere Geschlossenheit. Wir wollen uns hier darauf beschränken, einige typische Schlußarten herauszugreifen, die auch den Einfluß der Mathematik erkennen lassen. Bolzano behandelt zunächst die Schlüsse, die sich aus einem Satze der Grundform ableiten lassen, „wenn des Veränderlichen in ihm so viel angenommen wird, als sich in einem Satze nur immer annehmen läßt" (W. II, S. 398). Ist der Satz „A hat b" wahr, dann muß die Subjektvorstellung A eine Gegenstandsvorstellung sein (S. 328). Nach der Erklärung der Ableitbarkeit kann daher der

[1]) Husserl sagt in diesem Zusammenhange: „Niemand kann es den Mathematikern verwehren, alles, was nach mathematischer Form und Methode zu behandeln ist, für sich in Anspruch zu nehmen. Nur wer die Mathematik als moderne Wissenschaft, zumal die formale Mathematik, nicht kennt und sie bloß an Euklid und Adam Riese mißt, kann noch an dem allgemeinen Vorurteil haften bleiben, als ob das Wesen des Mathematischen in Zahl und Quantität läge. Nicht der Mathematiker, sondern der Philosoph überschreitet seine natürliche Rechtssphäre, wenn er sich gegen die „mathematisierenden" Theorien der Logik wehrt und seine vorläufigen Pflegekinder nicht ihren natürlichen Eltern übergeben will" (L. U. I, S. 252 f.). — Husserl geht in dieser Auffassung wohl doch etwas zu weit.

Satz: „Die Vorstellung A hat Gegenständlichkeit" als ein Schlußsatz jenes Satzes betrachtet werden. Ebenso gelten die beiden Schlußsätze: „Die Vorstellung [A]b hat Gegenständlichkeit" und „die Vorstellung [A]non b hat keine Gegenständlichkeit" (W.II, S. 399).[1]) Im wesentlichen decken sich die meisten Schlußsätze, die aus einem Satze der Grundform abgeleitet werden, mit den sog. unmittelbaren Schlüssen der herkömmlichen Schlußlehre. Bolzano verwirft jedoch mit Unrecht die Folgerungen durch Kontradiktion und Kontraposition (S. 421, Anm. und S. 435, 1. Anm.).

Die Untersuchung der Schlüsse aus zwei und mehr Vordersätzen zeigt deutlich die mathematische Arbeitsweise Bolzanos. Wir betrachten die beiden Prämissen: A hat b, C hat d, oder die gleichgeltenden Sätze:

Was a hat, hat b.
Was c hat, hat d.

Hinsichtlich der veränderlichen Bestandteile a, b, c und d lassen sich drei Fälle unterscheiden: Die Vordersätze enthalten d i e s e l b e n veränderlichen Vorstellungen; beide Sätze haben nur e i n e gemeinsame Veränderliche; es ist k e i n e veränderliche Vorstellung gemeinsam.

I. Fall: Was a hat, hat b.
Was b hat, hat a.

Berücksichtigen wir hier auch die Sätze, in denen die Vorstellungen a und b — entweder nur eine oder beide — mit dem Begriffe der Verneinung verknüpft sind, so läßt sich jeder der beiden Vordersätze in 8 Formen kleiden, die aber alle nicht wesentlich voneinander verschieden sind:

1. Was a hat, hat b.
2. Was b hat, hat a.
3. Was a hat, hat nicht b.
4. Was b hat, hat nicht a.
5. Was a nicht hat, hat b.
6. Was b nicht hat, hat a.
7. Was a nicht hat, hat nicht b.
8. Was b nicht hat, hat nicht a.

Gehen wir von irgendeinem dieser Sätze aus, etwa von dem ersten, so kann als zweite Prämisse nur einer der übrigen 7 Sätze fungieren. Wir erhalten also die Kombinationen: (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (1,7), (1,8). Von diesen scheiden die Kombinationen (1,3), (1,4) und (1,6) aus, weil ihre Sätze nicht miteinander verträglich sind, d. h. nicht beide zugleich wahr sein

[1]) Aus dem ersten dieser beiden Schlußsätze folgen die gleichgeltenden Sätze: „Die Vorstellung [B]a hat Gegenständlichkeit" und „die Vorstellung [Etwas](a+b) hat Gegenständlichkeit". Ebenso lassen sich aus dem letzten der oben angeführten Schlußsätze noch zwei gleichgeltende Sätze ableiten.

können. Es bleiben also nur die vier Kombinationen (1,2), (1,5), (1,7) und (1,8) zu untersuchen. Eine von diesen soll hier kurz besprochen werden.

(1,2): Was a hat, hat b.
Was b hat, hat a.

Unter der Voraussetzung, daß a ungleich b ist — denn wenn a gleich b wäre, hätten wir nur e i n e n Vordersatz — sagen diese Sätze aus:

„Alle Gegenstände, die der Vorstellung A unterstehen, unterstehen auch der Vorstellung B".

„Alle Gegenstände, die der Vorstellung B unterstehen, unterstehen auch der Vorstellung A" (W. II, S. 406).

A und B sind demnach Wechselvorstellungen; aber auch umgekehrt ermöglicht ein Paar Wechselvorstellungen die Aufstellung dieser beiden Sätze. Wir können daher den Schlußsatz ableiten: „Jeder Gegenstand einer der Vorstellungen A und B ist ein Gegenstand beider". Dieser Schlußsatz steht zu seinen Prämissen in dem Verhältnisse einer wechselseitigen Ableitbarkeit. Derartige Schlüsse kommen nicht nur in wissenschaftlichen Vorträgen, sondern selbst im gewöhnlichen Sprachgebrauche häufig vor. Vor allem wird der Schluß, daß ein Paar Vorstellungen W e c h s e l v o r s t e l l u n g e n sind, oft angewandt. „So pflegt es besonders der Mathematiker bei seinen Begriffen sehr fleißig anzumerken, welche derselben Wechselbegriffe sind; denn seine G l e i c h u n g e n sind ja nur eben Aussagen, daß ein Paar Vorstellungen[1]) . . . . Wechselvorstellungen sind" (S. 409 Anm.). In der Tat macht man beim Lösen der Gleichungen von der erwähnten Schlußart stillschweigend Gebrauch.

II. Fall: Die beiden Vordersätze haben nur e i n e n gemeinschaftlichen Bestandteil. Die Ergebnisse dieser Untersuchung decken sich im wesentlichen mit der herkömmlichen Lehre von den verschiedenen Arten der sogen. mittelbaren Schlüsse.

III. Fall: In beiden Prämissen ist k e i n e Veränderliche gemeinsam.

Was a hat, hat b.
Was c hat, hat d.

Hier kommt es bei der Wahl der Vorstellungen lediglich darauf an, daß die Prämissen tatsächlich zwei verschiedene Wahrheiten enthalten. Ein Schlußsatz, der sich aus ihnen ableiten läßt, ist

[1]) Gemeint sind hier die S e i t e n einer Gleichung.

z. B. folgender: „In einem Ganzen, darin die durch die Unterlagen[1]) der Sätze: A hat b, C hat d, vorgestellten Gegenstände als Teile erscheinen, fehlt es auch nicht an Teilen, die den Vorstellungen B und D (d. h. den zu den Aussagen der genannten Sätze gehörigen Concretis) unterstehen" (S. 416). Dieser Schluß wurde bereits im vorigen Abschnitte bei der Beantwortung der Frage erwähnt, ob die Dreizahl der Termini die höchste und die quaternio terminorum immer verfehlt sei. Bolzano verneint ja diese Frage, wie wir gesehen haben. Den Einwand, der aufgestellte Schlußsatz sei kein einfaches logisches Urteil, sondern lediglich eine g r a m m a t i s c h e Verbindung der beiden Vordersätze, sucht Bolzano durch den Hinweis zu widerlegen, daß der Schlußsatz es unentschieden lasse, ob es die A oder die B seien, denen die Beschaffenheit C oder D zukomme. „Man kann die Vorstellungen C und D in den Prämissen versetzen, und die Konklusion bleibt gleichwohl wahr" (S. 417, Anm.).

In ähnlicher Weise erfolgt die Untersuchung der Schlußsätze, die sich aus einer Verbindung von drei Vordersätzen ergeben. Auch diese Ausführungen zeigen klar, daß Bolzano sich weniger von rein logischen Gesichtspunkten hat leiten lassen, als vielmehr von dem Drange nach Vollständigkeit mathematischer Kombinationen. Er mochte den geringen Wert seiner Spekulationen eingesehen habe, als er in dem einleitenden Paragraphen zu der Lehre von den Schlüssen schrieb: „Wer solche Untersuchungen zu trocken findet, kann dieses Hauptstück allenfalls ganz überschlagen" (S. 394).

Eingehend untersucht Bolzano die Schlüsse aus „Aussagen und Verneinungen der G e g e n s t ä n d l i c h k e i t einer Vorstellung". Soll ein Satz aussagen, daß es tatsächlich Gegenstände gibt, auf die sich eine Vorstellung A bezieht, so läßt er sich in die allgemeine Form kleiden: „Die Vorstellung A hat Gegenständlichkeit". Von den vielen Schlußsätzen, die aus e i n e r solchen Aussage abgeleitet werden, seien hier zwei erwähnt. Ohne Zweifel gibt es unter den Gegenständen der Vorstellung A, deren Gegenständlichkeit vorausgesetzt wird, wenigstens einen, der entweder der beliebig angenommenen Vorstellung X oder der Vorstellung Nicht-X untersteht. Eine der beiden Vorstellungen [A]x oder [A]non x hat also gewiß Gegenständlichkeit. Es läßt

[1]) Bolzano versteht unter der „U n t e r l a g e" eines Satzes die zugehörige Gegenstands- oder Subjektvorstellung (W. II, S. 8).

sich demnach der Schlußsatz ableiten: „Der Inbegriff der Vorstellungen [A]x und [A] non x ist kein Inbegriff gegenstandsloser Vorstellungen" (W. II. S. 428). Eine Reihe anderer Schlußsätze ergibt sich, wenn man die Bestandteile der Vorstellung berücksichtigt, deren Gegenständlichkeit vorausgesetzt wird. Sie habe die Form: [Etwas](a + b + c + d + . . .). Selbstverständlich kann diese Vorstellung mit jeder ihr gleichgeltenden vertauscht werden, ohne daß die Wahrheit des Vordersatzes dadurch verletzt wird. Solche gleichgeltenden Vorstellungen sind nun schon ihrer Form nach folgende: [A](b + c + d + . . .), [B](a + c + d + . . .), [[A]b](c + d + . . .), [[A]c](b + d + . . .) usw., welche Beschaffenheitsvorstellungen man auch für a, b, c, d, . . . einsetzen mag. Es gelten daher die Schlußsätze:

„Die Vorstellung [A](b + c + d + . . .) hat Gegenständlichkeit.
Die Vorstellung [B](a + c + d + . . .) hat Gegenständlichkeit.
Die Vorstellung [[A]b](c + d + . . .) hat Gegenständlichkeit.
Die Vorstellung [[A]c](b + d + . . .) hat Gegenständlichkeit.
usw." (S. 428).

Wird in dem Vordersatz die Gegenständlichkeit einer Vorstellung A verneint, so läßt sich auch kein Gegenstand angeben, auf den sich die Vorstellung „A + X" bezieht, wobei X wieder eine beliebige von A verschiedene Vorstellung bedeutet. Aus dem Vordersatze „Die Vorstellung A hat keine Gegenständlichkeit" läßt sich daher der Schlußsatz ableiten: „Auch die Vorstellung [A]x hat keine Gegenständlichkeit" (S. 432). Geben wir der Vorstellung A wieder die Form [Etwas](a + b + c + d + . . .), so können wir nach demselben Verfahren wie oben die Schlußsätze ermitteln: „Die Vorstellung [A](b + c + d + . . .) hat keine Gegenständlichkeit. Die Vorstellung [B](a + c + d + . . .) hat keine Gegenständlichkeit" usw. (S. 432).

Wir nehmen an, daß eine der Teilvorstellungen, aus denen die Vorstellung [Etwas](a + b + c + d + . . .) zusammengesetzt ist, etwa die Vorstellung [Etwas]a = A, Gegenständlichkeit hat. In der Menge der Vorstellungen [A]non b, [A]non c, [A]non d, . . . gibt es dann wenigstens eine gegenständliche. Denn wären alle gegenstandslos, so müßte jedes A jede der Beschaffenheiten b, c, d, . . . haben. Die Vorstellung [Etwas](a + b + c + d + . . .) könnte somit nicht gegenstandslos sein, was der Voraussetzung widerspräche. Aus dem Satze „Die Vorstellung [Etwas](a + b + c + d + . . .) hat keine Gegenständlichkeit" läßt sich daher

der Schlußsatz ableiten: „Wenn die Vorstellung A Gegenständlichkeit hat, so ist der Inbegriff der Vorstellungen [A]nb, [A]nc, [A]nd, . . . kein Inbegriff gegenstandsloser Vorstellungen" (W. II, S. 435).[1]) Diese Beispiele zeigen zur Genüge die Bedeutung der mathematischen Kurzschrift. Ohne Zweifel handelt es sich hier um einen Versuch, die Schlußlehre nach Art der modernen Logistik umzugestalten.

Die Aussagen über die Gegenständlichkeit einer Vorstellung haben gewisse Ähnlichkeit mit den partikulären Urteilen. Nach Ansicht Bolzanos hat das partikulär bejahende Urteil „Einige A sind B" bzw. das partikulär verneinende Urteil „Einige A sind nicht B" keinen anderen Sinn als den: „Die Vorstellung von einem A, das zugleich B wäre oder nicht wäre (d. h. das die Beschaffenheit b hätte oder nicht hätte), hat Gegenständlichkeit" (S. 431 Anm.). In der Bolzanoschen Symbolik erscheinen die partikulären Urteile demnach unter der Eorm: „Die Vorstellung [A]b bzw. [A]non b hat Gegenständlichkeit". Nach dieser Erklärung können dann die unmittelbaren Folgerungen, die in der herkömmlichen Schlußlehre aus einem Urteil der Form i oder o gezogen werden, auch nach den Bolzanoschen Schlußregeln gewonnen werden. So kann z. B. aus dem Urteile „Einige S sind P" durch Konversion das Urteil „Einige P sind S" folgen. In der Bolzanoschen Schreibweise stellt sich diese Folgerung folgendermaßen dar:

Die Vorstellung [A]b hat Gegenständlichkeit.
Die Vorstellung [B]a hat Gegenständlichkeit.

Dieses Beispiel zeigt deutlich die Mängel der symbolischen Darstellungsweise. Während man nämlich in dem vorliegenden Falle tatsächlich nur eine conversio per accidens vornehmen kann, gestattet die Bolzanosche Symbolik stets und ohne jede Einschränkung

[1]) Eine Schlußart, in der die „Verneinung der Gegenständlichkeit einer Vorstellung" vorkommt, ist z. B. auch die vollständige Induktion, die Bolzano richtig unter den eigentlichen Syllogismen aufführt. Er formuliert dieses Prinzip folgendermaßen: „Verbinden wir mehrere Sätze der Form: A hat m, B hat m, C hat m, . . . oder auch nur die eingeschränkteren Sätze: [X]a hat m, [X]b hat m, [X]c hat m, . . . mit dem Satze: „Die Vorstellung [X](non a + non b + non c + . . .) hat keine Gegenständlichkeit", so ergibt sich hieraus der Schlußsatz: „Jedes X hat m" (W. II, S. 446). Die vollständige Induktion ist typisch mathematisch. Poincaré erblickt in ihr den Kern der mathematischen Schlußweise, weil sie in der Kategorie analoger Prinzipien das einfachste ist. — Henri Poincaré, Wissenschaft und Methode. Autorisierte deutsche Ausgabe mit erläuternden Anmerkungen von F. und L. Lindemann. Leipzig und Berlin 1914 (Wissenschaft und Hypothese, XVII), S. 135.

eine conversio simplex[1]).

Unter den Schlüssen aus einem Satze der allgemeinen Grundform „A hat b" und einer „Aussage der Gegenständlichkeit einer Vorstellung" finden sich auch die kategorischen Schlüsse aus einem allgemeinen und besonderen Urteile, wenn wir die Bolzanosche Symbolik in die Sprache der herkömmlichen Syllogistik übertragen, z. B.:

„Was a hat, hat b.
Die Vorstellung [Etwas](a+c) hat Gegenständlichkeit.
Auch die Vorstellung [Etwas](b+c) hat Gegenständlichkeit" (W. II, [S. 440).

Die Wahrheit der beiden Vordersätze wird nicht gestört, wenn wir die Vorstellung [Etwas](a+c) durch eine ihr gleichgeltende ersetzen. Solche gleichgeltenden Vorstellungen sind [A]c und [C]a. Setzen wir diese in die zweite Prämisse ein, so erhalten wir die Schlüsse:

1. Was a hat, hat b.
   Die Vorstellung [A]c hat Gegenständlichkeit.
   Die Vorstellung [B]c hat Gegenständlichkeit.
2. Was a hat, hat b.
   Die Vorstellung [A]c hat Gegenständlichkeit.
   Die Vorstellung [C]b hat Gegenständlichkeit.
3. Was a hat, hat b.
   Die Vorstellung [C]a hat Gegenständlichkeit.
   Die Vorstellung [C]b hat Gegenständlichkeit.
4. Was a hat, hat b.
   Die Vorstellung [C]a hat Gegenständlichkeit.
   Die Vorstellung [B]c hat Gegenständlichkeit. (S. 442).

Ersetzen wir nunmehr die symbolische Schreibweise Bolzanos durch die Schemata der herkömmlichen Logik, so erhalten wir aus 1) die modi Disamis, Datisi und Bocardo, aus 2) den modus Ferison, aus 3) die modi Darii und Ferio, aus 4) den modus Dimatis. Diese 7 Schlußmodi sind also alle in dem oben angeführten Beispiele enthalten; sie sind demnach nicht wesentlich voneinander verschieden, formell unterscheiden sich einige nur in ihren gleichgeltenden Vorstellungen.

[1]) Bei den Urteilen der Form i ist eine conversio simplex nur möglich, wenn der Umfang des Begriffes S z. T. überdeckt wird von dem Umfange des Begriffes P; z. B.: „Einige Parallelogramme sind regelmäßige Figuren". Wird der Umfang des Begriffes P vom Umfange des Begriffes S umschlossen, so wird aus einem Urteil der Form i ein Urteil der Form a; z. B.: Aus „Einige Parallelogramme sind Quadrate" folgt: „Alle Quadrate sind Parallelogramme".

Von besonderem Interesse für unseren mathematisch eingestellten Logiker sind die Schlüsse mit numerischen Angaben. Dahin gehören in erster Linie die Schlüsse aus Bestimmungen der Weite einer Vorstellung, die auch die Anwendung der symbolischen Schreibweise gestatten. Von den zahlreichen Schlüssen dieser Art wollen wir hier drei anführen, die auch zahlentheoretisch von Bedeutung sind.

1. „Die Vorstellung [Etwas](a+b) ist eine Einzelvorstellung.
Was nicht a hat, hat b.

Das Gebiet der Vorstellung B ist nur um einen Gegenstand weiter als das der Vorstellung Nicht-A" (S. 460).

Zur Erklärung dieser Schlußart führt Bolzano folgendes Beispiel an: A sei eine Zahl, die k e i n e Wurzel der Gleichung (x—1)(x—2)(x—3)=0 ist, und B sei eine Wurzel der Gleichung (x—1)(x—2)(x—3)(x—4)=0. Dann ist [Etwas](a+b) d. h. etwas, das keine Wurzel der ersten Gleichung, wohl aber eine der zweiten Gleichung ist, eine Einzelvorstellung; die Forderung der ersten Prämisse ist somit erfüllt. Aber auch die zweite Prämisse gilt, denn jedes Nicht-A ist ein B, d. h. jede Wurzel der Gleichung (x—1)(x—2)(x—3)=0 ist gleichzeitig eine Wurzel der Gleichung (x—1)(x—2)(x—3)(x—4)=0. Dieses Beispiel zeigt dann auch die Richtigkeit des Schlußsatzes, daß die Vorstellung B einen Gegenstand mehr hat als die Vorstellung Nicht-A; denn die zweite Gleichung hat vier Lösungen, die erste Gleichung aber nur drei.

Zur Zählung von Gegenständen dient folgende Schlußart mit beliebig vielen Vordersätzen:

2. „[M]a ist eine Einzelvorstellung.
[M](b + non a)ist eine Einzelvorstellung.
[M](c + non b + non a) ist eine Einzelvorstellung.
. . . . . .
(Im ganzen n solcher Sätze).

Die Summe der Gegenstände [M]a, [M](b + non a), [M](c + non b + non a), . . . ist = n" (S. 464).

Die Symbolik läßt klar erkennen, daß die einzelnen Gegenstände alle voneinander verschieden sind.

3. „Das All der A ist = m.
Das All der B ist = n.
Das All der C ist = p, u. s. w.
Die Vorstellungen, welche durch Aufnahme von je zweien der a, b, c, . . . an die Stelle der x und y in

die Form [Etwas](x + y) erzeugt werden können, sind alle gegenstandslos.

Die Summe aller A, B, C,... ist m + n + p + ..." (S. 468).

In den Prämissen dieses Schlusses wird zunächst angegeben, auf wieviel Gegenstände sich jede der Vorstellungen A, B, C, ... bezieht. Die letzte Prämisse, die in ihrer Formulierung die mathematische Betrachtungsweise Bolzanos besonders kennzeichnet, sagt sodann aus, daß die genannten Vorstellungen keinen Gegenstand gemeinsam haben. Erst unter dieser Voraussetzung läßt sich eine bestimmte Aussage über die Summe aller vorgestellten Gegenstände machen.

Wir haben früher darauf hingewiesen, daß Bolzano die logischen Beziehungen der Schlüsse von ihrem subjektiven Erschließen scharf trennt. Die Schlußfolgerungen bestehen an sich, d. h. unabhängig davon, ob sie von irgend jemand wirklich gezogen werden oder nicht. Diese Unabhängigkeit von allen subjektiven Momenten wird auch den sog. Wahrscheinlichkeitsschlüssen beigelegt. Ein Wahrscheinlichkeitssatz ist ein Satz, der die Wahrscheinlichkeit eines anderen Satzes bestimmt. Schlüsse, in denen derartige Sätze vorkommen, heißen „Wahrscheinlichkeitsschlüsse im weiteren Sinne" (S. 509). So läßt sich z. B. aus dem Satze „Der Grad der Wahrscheinlichkeit des Satzes M hinsichtlich auf die Voraussetzungen A, B, C, ... und bei den veränderlichen Vorstellungen i, j, ... ist $= \mu$" der Satz ableiten: „Die Wahrscheinlichkeit des Satzes Neg. M hinsichtlich auf dieselben Voraussetzungen und bei denselben Vorstellungen i, j, ... ist also $= 1-\mu$" (S. 173). Denn jeder Inbegriff von Vorstellungen, der an Stelle der veränderlichen i, j, ... alle A, B, C, D, ... wahr macht, macht entweder M oder Neg. M wahr. Die Summe der Fälle, in denen M und Neg. M wahr werden können, ist daher gleich der Summe der Fälle, in denen die Sätze A, B, C, D, ... wahr werden[1]).

Von den Wahrscheinlichkeitsschlüssen im weiteren Sinne sind wohl zu unterscheiden die „Schlüsse der bloßen Wahrscheinlichkeit" (S. 510). Diese bestehen nach der Erklärung Bolzanos erstens aus einem Obersatze, der die Wahrscheinlichkeit eines Satzes M unter Voraussetzung der Sätze A, B, C, ... aussagt, zweitens aus einem Untersatze, der behauptet, daß die genannten Voraussetzungen A, B, C, ... von irgendeinem denkenden Wesen

[1]) Vgl. S. 88 dieser Arbeit.

für wahr gehalten werden, und
drittens aus einem Schlußsatze, der erklärt, daß für dieses denkende Wesen auch der Satz M Wahrscheinlichkeit habe, d. h. für wahr angenommen werden könne.

Selbstverständlich handelt es sich bei diesen Schlüssen nicht wie bei den früheren um eine eigentliche Ableitung: „denn nicht der Satz M selbst, sondern höchstens der Satz, daß M wahrscheinlich sei, ist aus den Sätzen A, B, C, . . . im eigentlichen Sinne des Wortes ableitbar" (S. 510). Zu den Schlüssen der letzten Art, bei denen also ein Satz M aus gewissen anderen nur mit Wahrscheinlichkeit gefolgert wird, gehören u. a. die unvollständige Induktion und der Analogieschluß, den Bolzano als Sonderfall der Induktion betrachtet.

Die vorliegende Arbeit hat den überragenden Einfluß der Mathematik auf die logischen Untersuchungen Bolzanos, die den Hauptbestandteil seiner Philosophie bilden, nachzuweisen versucht. Ohne Zweifel hat Bolzano eine Verbindung von Logik und Mathematik angestrebt und zum Teil auch mit gutem Erfolge hergestellt. Nicht immer aber konnten wir seinen Ausführungen uneingeschränkt beipflichten; wir mußten vielmehr feststellen, daß die vorwiegend mathematische Betrachtungsweise seine Untersuchungen zuweilen nachteilig beeinflußt hat. Hier liegt nun die Frage nahe, ob auch auf den übrigen Gebieten seiner Philosophie der Einfluß der Mathematik zu erkennen ist. Was zunächst die Psychologie betrifft, so haben wir die unpsychologische Denkungsart Bolzanos schon verschiedentlich feststellen müssen. Sein Streben nach strenger Deduktion und mathematischer Formulierung verwehrt ihm manchen Blick in das seelische Geschehen. Das zeigt besonders die Einteilung der psychischen Phänomene (W. II, § 143), deren Definition nicht induktiv aus dem Erlebten, sondern deduktiv aus dem Seelenbegriffe gewonnen wird. Auch in seinen ästhetischen Ansichten ist er von der Mathematik beeinflußt; sie sind nicht ein Ergebnis der Selbstbeobachtung, sondern das Resultat einer peinlichen Begriffsanalyse.

Mag das philosophische System Bolzanos in vielen Stücken der Verbesserung und Ergänzung bedürfen, mögen manche seiner

Ansichten durch neuere Forschungen überholt sein, so ist doch der Kern seiner Philosophie, die Auseinandersetzung mit dem Problem der objektiven Wahrheit, von bleibendem Wert. Das anerkennt auch unsere Zeit, die sich auf die ewigen Werte und die unbeugsame Kraft der Tatsachen wieder zu besinnen scheint.

Literatur.

Es werden hier nur die durchgängig benutzten Werke angegeben; weitere Literaturangaben finden sich in den Anmerkungen.

1. Schriften Bolzanos.

Beiträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik, Prag 1810.

Dr. Bernard Bolzanos Paradoxien des Unendlichen. Herausgegeben aus dem schriftlichen Nachlasse des Verfassers von Dr. Fr. Prihonsky, Leipzig 1851. Unveränderte Neuauflage (mit Anmerkungen von H. Hahn) herausgegeben von A. Höfler, Leipzig 1920.

Dr. B. Bolzanos Wissenschaftslehre, Versuch einer ausführlichen und größtenteils neuen Darstellung der Logik mit steter Rücksicht auf deren bisherige Bearbeiter. Herausgegeben von mehreren seiner Freunde, 4 Bände, Sulzbach 1837. Neu herausgegeben in originalgetreuem Neudruck von A. Höfler, Leipzig 1914.

2. Veröffentlichungen über Bolzano.

Bergmann, Hugo: Das philosophische Werk Bernard Bolzanos, Halle 1909.

Geyser, Joseph: Grundlegung der Logik und Erkenntnistheorie, Münster 1919.

Gotthardt, Gerhard: Bolzanos Lehre vom Satz an sich in ihrer methodologischen Bedeutung, Berlin 1909.

Husserl, Edmund: Logische Untersuchungen, I. Band, Prolegomena zur reinen Logik, Halle 1913.

Kreibig: Über ein Paradoxon in der Logik Bolzanos, Vierteljahresschrift für wiss. Philosophie, Band 28 (1904).

Palágyi, Melchior: Der Streit der Psychologisten und Formalisten, Leipzig 1902.

Prihonsky, Neuer Anti-Kant, Bautzen 1850.

Schwarz, Bolzanos Vorstellungstheorie und Kants Lehre von der Raumanschauung, Diss. Göttingen 1911.

Ziehen, Th.: Lehrbuch der Logik auf positivistischer Grundlage mit Berücksichtigung der Geschichte der Logik, Bonn 1920.

Zimmermann, R.: Über den wissenschaftlichen Charakter Bolzanos, Sitzungsbericht der K. K. Akademie der Wissenschaften (Phil.-hist. Klasse), Wien 1849.

Lebenslauf.

Geboren bin ich, Simon Theobald, am 2. Februar 1895 in Niederberg, Kreis Koblenz. Meine Eltern sind der Landwirt Johann Theobald (†) und Susanna Theobald geb. Reckenthäler. Ich bin katholischer Konfession. Als Schüler des Kaiserin Augusta-Gymnasiums zu Koblenz meldete ich mich bei Ausbruch des Weltkrieges freiwillig zum Heeresdienste. Während eines Heimaturlaubs bestand ich am 15. Januar 1918 die Reifeprüfung. Nach Beendigung des Krieges studierte ich an der Universität Bonn Philosophie, Mathematik und Naturwissenschaften. Am 9. Mai 1924 bestand ich vor dem Wissenschaftlichen Prüfungsamt die Prüfung für das Lehramt an höheren Schulen. Die pädagogische Ausbildung erhielt ich an dem Städtischen Gymnasium und Realgymnasium in der Kreuzgasse zu Köln. Nach meiner pädagogischen Prüfung (am 13. März 1925) nahm ich die Bolzano-Arbeit, mit der ich mich schon während meiner Universitätsstudien beschäftigt hatte, wieder auf. Auf Grund dieser Arbeit bestand ich am 1. März 1928 vor der Philosophischen Fakultät der Universität Bonn das Doktorexamen.

Allen meinen akademischen Lehrern, besonders Herrn Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. Dyroff, bin ich zu größtem Danke verpflichtet.